

# ROBUSTHEIT UND ZUVERLÄSSIGKEIT IN DER AERODYNAMISCHEN VERDICHTERAUSLEGUNG

P. M. Flassig, A. K. Dutta und D. Bestle

Lehrstuhl Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik  
Brandenburgische Technische Universität Cottbus

Email: flassig@tu-cottbus.de, dutta@tu-cottbus.de, bestle@tu-cottbus.de

## Kurzfassung

*Der Bedarf, kostengünstige und zuverlässige Triebwerke zu konstruieren, steigt stetig. Dies zwingt Triebwerkshersteller, ihre Auslegungspraktiken kontinuierlich zu verbessern und neue Wege zu gehen. Dazu zählt unter anderem die direkte Berücksichtigung von Unsicherheiten. Auf dem Gebiet der aerodynamischen Verdichterauslegung steht diese trotz der enormen Bedeutung in den Anfängen. Im Gegensatz dazu wird die deterministische Optimierung, d.h. die automatisierte Suche nach optimalen Entwürfen, erfolgreich eingesetzt.*

*Intention der vorliegenden Untersuchung ist daher, Ansätze zu zeigen, wie deterministische Auslegungsprobleme in zuverlässigkeits- und robustheitsbasierte Mehrkriterien-Optimierungen überführt werden können. Am Beispiel einer hochbelasteten transsonischen Verdichterschaufelsektion und zweier denkbarer Szenarien zeigt die Arbeit sowohl die Notwendigkeit und das beträchtliche Potenzial, als auch die Grenzen einer probabilistischen Auslegung. Basierend auf einer deterministischen Schaufelauslegung [1] wird dazu zum einen ein unsicherer Anströmwinkel angenommen, zum anderen ein unsicheres Verhältnis der maximalen Schaufeldicke superponiert.*

## Einleitung

Kontinuierlich steigende Passagierzahlen und stetig wachsende Forderungen nach effizienteren und sicheren Flugzeugtriebwerken sind Motivation aktueller Forschung. Die Fragen nach der Zuverlässigkeit und Robustheit eines Triebwerkes sind dabei ohne die Berücksichtigung von Unsicherheiten nicht zu beantworten. Trotz dieser Tatsache steht der aerodynamische Verdichtenterwurf unter Unsicherheiten heute noch immer in den Anfängen.

Gründe dafür sind im Besonderen sinkende Entwurfszeiten, inhärente Probleme der numerischen Strömungsfeldanalyse, die exakte Ermittlung unsicherer Systemgrößen und Grenzen deterministischer Verfahren. Deshalb werden Verdichter von Flugzeugtriebwerken derzeit zum größten Teil deterministisch ausgelegt. Hier findet die Mehrkriterien-Optimierung intensive Berücksichtigung und ist bereits ein wichtiger Bestandteil industrieller Auslegungspraktiken [2], [3].

Mit Blick auf eine robuste aerodynamische Auslegung moderner Verdichterschaufeln unter Berücksichtigung von Unsicherheiten versucht diese Arbeit daher, einen Beitrag zum allgemeinen Verständnis des Gesamtproblems in seiner Vielfältigkeit und Komplexität zu leisten. Unter dem Aspekt der Mehrkriterien-Optimierung bildet dabei die Überführung deterministischer Problemformulierungen in probabilistische einen Schwerpunkt der Untersuchungen. Speziell für die aerodynamische Verdichterauslegung erfolgt eine Kategorisierung des Robustheitsbegriffes in Unsicherheiten und deterministische Variationen, Abbildung 1. Der Unterschied besteht hierbei darin, dass die Verteilung einer unsicheren Größe im zeitlichen Mittel bekannt ist, jedoch nicht deren exakter zeitlicher Verlauf. Im Gegensatz dazu kann für eine deterministisch variierende Größe der zeitliche Verlauf exakt angegeben werden. Zur Beurteilung eines Verdichtenterwurfes unter Unsicherheiten ist es weiterhin zweckmäßig zwischen Zuverlässigkeit und Robustheit im Sinne von Empfindlichkeit zu unterscheiden. Das primäre Ziel einer Zuverlässigkeitsanalyse besteht darin, eine Prognose über die Betriebssicherheit zu treffen, respektive der Versagenswahrscheinlichkeit. Eine Robustheitsbewertung versucht hingegen die Probabilistik eines unmittelbaren unsicheren Auslegungskriteriums

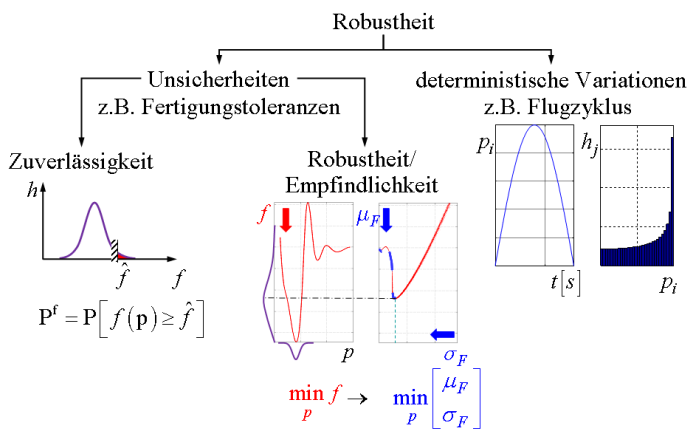


Abbildung 1. Aspekte der robusten aerodynamischen Verdichterauslegung.

zu charakterisieren, siehe Abbildung 1. Am Beispiel einer einfachen analytischen Problemformulierung wird das methodische Vorgehen zur zuverlässigkeits- und robustheitsbasierten Mehrkriterien-Optimierung bei der aerodynamischen Verdichterauslegung diskutiert. Ziel ist, die Erfordernis einer vektoriellen Problemformulierung durch konfliktäre Kriterien zu motivieren. Gleichzeitig dient es dazu, exemplarisch Methoden und Verfahren zur probabilistischen Bewertung vorzustellen und hinsichtlich deren Potenzial mit Blick auf die aerodynamische Verdichterauslegung zu beurteilen. Aufgrund seiner enormen Komplexität wird der Verdichtenterwurf bis heute in vier grundlegende Entwurfsphasen unterteilt [2]. Als Kompromiss zwischen begrenzter Analysezeit und möglichst genauer Wiedergabe des realen Strömungsverhaltens beschränkt sich die vorliegende Untersuchung auf die zweidimensionale Auslegung eines Profilschnittes auf der S1-Stromfläche unter Verwendung des Strömungslösers *Mises* [4]. Zur aerodynamischen Beurteilung eines Profilschnittes sowohl im Auslegungspunkt wie auch im Teil- und Überlastbereich eines Verdichters dient hauptsächlich die aus einer Anstellwinkelvariation resultierende Verlustpolare. Im Allgemeinen wird dabei ein Entwurf gefordert, der durch einen minimalen Verlust  $\omega^{DP}$  im Auslegungspunkt und einen maximalen Arbeitsbereich  $WR$  charakterisiert ist, Abbildung 2. Beide Kriterien sind zum Teil konfliktär, so dass ein Kompromiss erforderlich ist. In [5] wird der Widerspruch in den beiden Auslegungskriterien mit Hilfe ei-

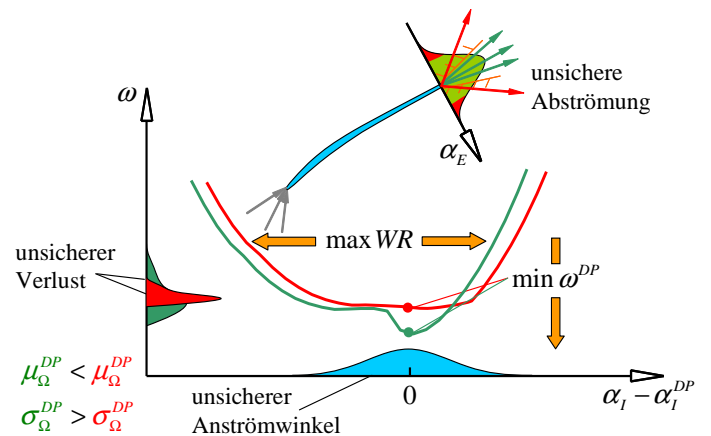


Abbildung 2. Verlustpolare einer Verdichterschaufelsektion unter probabilistischen Aspekten bewertet

nes Mehrkriterien-Optimierungsansatzes gelöst, bei dem gleichzeitig das deterministische Minimum der Verlustpolare und ein möglichst großer Arbeitsbereich gesucht werden. Die resultierenden Schaufeln zeigen allerdings zum Teil um den Auslegungspunkt unerwünschte Verläufe der Verlustpolare mit starken Änderungen des Verlustes bei nur kleinen Variationen des Anstellwinkels, Abbildung 2. Um dies zu vermeiden, wird in [1] für einen hochbelasteten Rotor die deterministische Bestimmung des Verlustes im Auslegungspunkt durch eine probabilistische Bewertung ersetzt, mit dem Ziel ein robustes Optimum zu finden. Dazu wird ein unsicherer Anstellwinkel mit vorgegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung, beispielsweise als Folge einer streuenden Abströmung der stromauf befindlichen Verdichterreihe, angenommen und eine statistische Bewertung des Verlustes im Auslegungspunkt vorgenommen. Als sich widersprechende Kriterien werden der Erwartungswert der unsicheren Verlustantwort und die Standardabweichung gewählt. Die Ergebnisse basieren dabei auf *Monte-Carlo-Simulationen* [6] und einer Approximation der Verlustpolare. Die aus der streuenden Anströmung resultierende unsichere Abströmung bleibt jedoch unberücksichtigt. Um die Strömungsumlenkung zu garantieren und eine Fehlanströmung der sich stromab befindenden Verdichterreihe zu verhindern, wird in dieser Arbeit die in [1] formulierte Optimierungsaufgabe durch die Ausfallwahrscheinlichkeit bezüglich der Strömungsumlenkung erweitert. Als weiterer Parameter und zur Bestätigung der für den Anstellwinkel gezeigten Methodik wird der parametrisierten

Schaufel ein unsicheres Verhältnis  $tc$  von maximaler Dicke und Profildicke superponiert.

Zur Lösung des vektoriellen Optimierungsproblems wird ein genetischer Optimierungsalgorithmus verwendet, der robust gegen Konvergenzprobleme bei der numerischen Strömungsfeldanalyse ist, sowie benutzerdefinierte Strafterme. Als Folge der damit verbundenen hohen Anzahl von Funktionsauswertungen und des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen unsicheren Eingangs- und Ausgangsgrößen wird auf Antwortflächenverfahren zurückgegriffen, um damit eine deutliche Reduzierung der Analysezeit zu erzielen.

Der Profilaufbau der Verdichterschaufelsektion basiert primär auf den dimensionslosen Verteilungen der Skelettlinienwinkel und der Profildicke, die mit Hilfe von Freiformkurven parametrisiert werden [7]. Diese garantieren einen kleinen und vor allem empfindlichen Parameterraum, und erleichtern die empirische Beurteilung der gefundenen Entwürfe [8].

### Analytisches Beispiel

Die Erfordernis einer probabilistischen Problemformulierung und die dabei resultierenden Herausforderungen für eine Optimierung lassen sich am einfachsten mit Hilfe eines analytischen Problems exemplarisch wiedergegeben. Betrachtet wird dazu folgende deterministische Optimierungsaufgabe:

$$(1) \quad \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} y \quad \text{mit } y = -p_1^2 p_2$$

und dem zulässigen Entwurfsraum

$$(2) \quad \mathcal{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{1}, h(\mathbf{p}) \geq 0\}$$

beschrieben durch die begrenzende Funktion

$$(3) \quad h(\mathbf{p}) = -35.87p_1^5 + 86.36p_1^4 - 58.56p_1^3 + 4.50p_1^2 + 4.77p_1 - 0.27 - p_2.$$

Alle Entwürfe, die auf bzw. unterhalb dieser Funktion liegen, sind zulässig. Der globale Minimierer  $\mathbf{p}^* = [1.00, 0.94]^T$  liegt direkt auf der Grenze der Ungleichheitsnebenbedingung, Abbildung 3(a). Unter der Annahme

unabhängig und unkorreliert streuender Eingangsgrößen mit normalverteilter Dichtefunktion  $f_{\mathbf{P}}(\mathbf{p}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{P}}, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{P}})$ , mit  $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{P}} = [p_1, p_2]^T$  und  $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{P}} = [0.07, 0.07]^T$ , lassen sich die Ausfallwahrscheinlichkeit

$$(4) \quad P^f = P[h(\mathbf{p}) < 0],$$

der Erwartungswert

$$(5) \quad \mu_Y = E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy$$

und die Standardabweichung

$$(6) \quad \begin{aligned} \sigma_Y &= \sqrt{E[(Y - \mu_Y)^2]} \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu_Y)^2 f_Y(y) dy} \end{aligned}$$

der unsicheren Funktionsantwort  $Y$  für jeden Entwurfsvektor angeben, Abbildung 3(b-d). Die Dichtefunktion der unsicheren Verlustantwort  $Y$  resultiert aus den Verteilungen der Entwurfsvariablen und dem funktionalen Zusammenhang:

$$(7) \quad f_{\mathbf{P}}(\mathbf{p}) \xrightarrow{y=y(\mathbf{p})} f_Y(y).$$

Für die Berechnung der ersten zwei statistischen Momente der unsicheren Funktionsantwort  $Y$  werden der erwartungstreue Schätzer

$$(8) \quad \mu_Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

für den Erwartungswert und

$$(9) \quad \sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_Y)^2}$$

für die Standardabweichung, basierend auf  $n = 30$  Monte-Carlo-Simulationen [6], verwendet. Die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit  $P^f$  erfolgt näherungsweise über

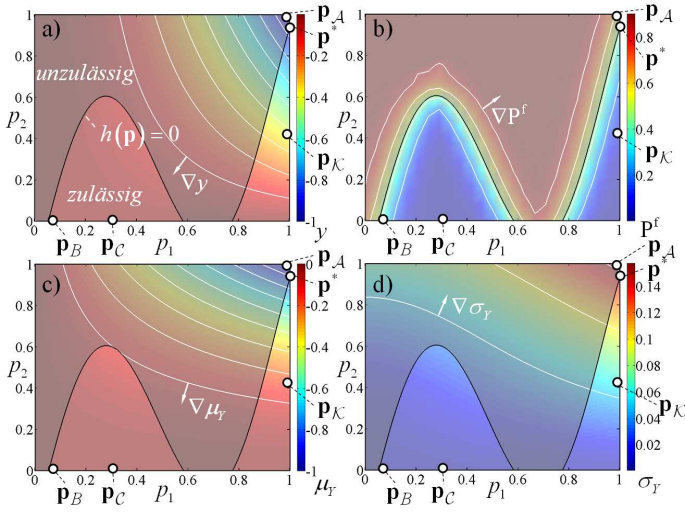


Abbildung 3. Deterministisches Problem (a) unter probabilistischen Aspekten (b-d)

die *First-Order-Reliability-Method* [9], d.h.  $P^f \approx P_{\text{FORM}}^f$  bei der die limitierende Funktion  $h(\mathbf{p}) = 0$  im Punkt des größtmöglichen Fehlers linearisiert wird. Entwürfe weit oberhalb der limitierenden Funktion  $h(\mathbf{p}) = 0$  weisen Ausfallwahrscheinlichkeiten von bis zu 100 Prozent auf, da jeder Entwurf unter Unsicherheiten die Nebenbedingung verletzen würde, wohingegen für Parameterkombinationen weit unterhalb der Funktion kein Entwurf unter Unsicherheiten ausfallen würde. Im Bereich um die begrenzende Funktion  $h$  schwankt die Ausfallwahrscheinlichkeit je nach Lage zwischen Null und Eins, da einige Entwürfe unter Unsicherheiten die Nebenbedingung verletzen würden und andere nicht. Befindet sich ein Entwurf direkt auf der Nebenbedingung  $h$ , beträgt die Ausfallwahrscheinlichkeit ungefähr 50 Prozent, Abbildung 3(b). Der globale Minimierer  $\mathbf{p}^* = [1.00, 0.94]^T$  liegt auf der Nebenbedingung mit einer inakzeptablen Ausfallwahrscheinlichkeit von  $P_{\text{FORM}}^f = 0.50674$ . Der Entwurf wäre nicht zulässig. Der Mittelwert  $\mu_Y$  ist für den globalen Minimierer  $\mathbf{p}^*$  sehr klein. Im Gegensatz dazu ist die Standardabweichung  $\sigma_Y$  aber sehr hoch. In Abbildung 3(c,d) wird deutlich, dass Mittelwert und Streuung konfliktär sind, so dass sich mit Blick auf eine Optimierung die Einführung einer vektoriellen Zielfunktion empfiehlt. Um die Zuverlässigkeit als weiteres Kriterium in die Optimierung aufzunehmen, wird

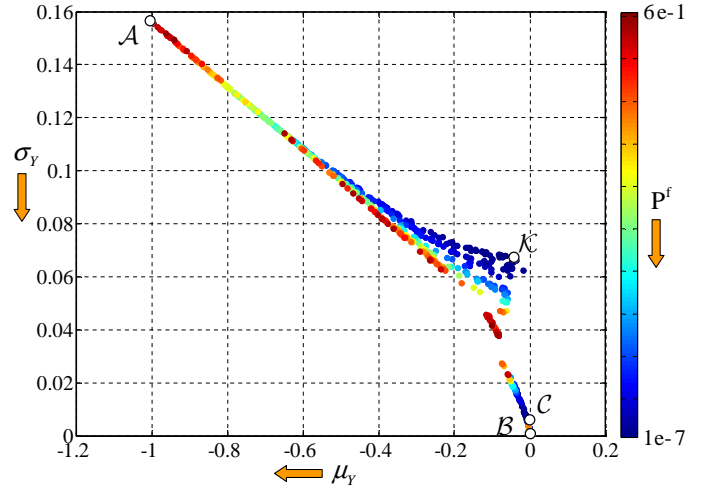


Abbildung 4. Nicht-dominierte Lösungen  $\mathcal{F}^P$  der Mehrkriterien-Optimierung nach Gleichung (10)

zusammenfassend folgendes Problem formuliert:

$$(10) \quad \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \begin{bmatrix} \mu_Y \\ \sigma_Y \\ P^f \end{bmatrix}$$

mit  $\mathcal{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{1}, 10^{-7} \leq P^f \leq 0.6\}$ . Abbildung 4 zeigt Ergebnisse dieser zuverlässigkeits- und robustheitsbasierten Mehrkriterien-Optimierung. Als genetischer Optimieralgorithmus ist der *NSGA-II* [10] mit  $P = 32$  Individuen und  $G = 32$  Generationen benutzt worden. Die Prozessintegration erfolgt über *iSIGHT-FD* [11]. Von den in Abbildung 4 gezeigten *Pareto-optimalen* Lösungen  $\mathcal{F}^P$  [12] sollen vier charakteristische Punkte  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{K}$ , d.h. der Punkt mit minimalem Mittelwert, minimaler Streuung, minimaler Ausfallwahrscheinlichkeit und das sogenannte Knie, genauer bezüglich ihrer Vertrauenswürdigkeit und Lage im Parameterraum in Abbildung 3 analysiert werden. Dazu werden für jeden Punkt eine Million Stichproben über das *Latin-Hyper-Cube* Verfahren [13] generiert, Schätzungen nach Gleichung (8) und (9) berechnet und die Ausfallwahrscheinlichkeit über eine Indikatorfunktion ausgezählt. Zudem erfolgt je eine Zuverlässigkeitsanalyse über die in *optiSLang* [14] implementierte Methode des *Directional Sampling* mit  $n = 60$  Richtungen. In Tabelle 1 sind die Ergebnisse dieser Untersuchungen zusammengefasst.

	Mittelwert $\mu_Y$		Standardabweichung $\sigma_Y$		Ausfallwahrscheinlichkeit $P^f$		
	<i>MCS</i> $n = 30$	<i>LHC</i> $n = 10^6$	<i>MCS</i> $n = 30$	<i>LHC</i> $n = 10^6$	<i>FORM</i>	<i>LHC</i> $n = 10^6$	<i>DS</i> $n = 60$
$\mathcal{A}$	-1.0041	-1.0037	0.15699	0.15660	0.59115	0.61775	-
$\mathcal{B}$	$-2.6 \cdot 10^{-5}$	$-2.1 \cdot 10^{-6}$	0.00076	0.00109	0.41647	0.41714	0.34144 ( $\sigma_{DS} = 5.6 \cdot 10^{-2}$ )
$\mathcal{C}$	-0.0001	-0.0003	0.00613	0.00727	0.00011	0.00039	0.00031 ( $\sigma_{DS} = 7.9 \cdot 10^{-5}$ )
$\mathcal{K}$	-0.0421	-0.0416	0.06739	0.07116	0.00238	0.00256	0.00210 ( $\sigma_{DS} = 5.9 \cdot 10^{-4}$ )

Tabelle 1. Analyse charakteristischer Punkte der Mehrkriterien-Optimierung (10)

Ein Vergleich der ersten beiden Kriterien zeigt, dass die Werte der Mehrkriterien-Optimierung mit denen der Validierungsrechnung nahezu übereinstimmen. Durch die Linearisierung der limitierenden Zustandsfunktion  $h(\mathbf{p})$  im Punkt des größtmöglichen Fehlers zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit bei der *First-Order-Reliability-Method* ergeben sich größere Abweichungen im Vergleich zu den Validierungsrechnungen. Die gradientenbasierte Optimierung zur Lokalisierung dieses Punktes birgt weiterhin vor allem bei multimodalen Problemen die Gefahr, in ein lokales Optimum zu konvergieren.

Eine Diskussion der Punkte  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{K}$  im Parameterraum, Abbildung 3 und Tabelle 1, bestätigt nicht nur diese Ergebnisse, sondern spiegelt auch die Widersprüchlichkeit wieder und rechtfertigt die Wahl der Kriterien. So liegt der Punkt des kleinsten Mittelwertes  $\mathcal{A}$  wie erwartet am oberen rechten Rand des zulässigen geometrischen Entwurfsraumes und ist durch eine sehr hohe Streuung wie auch Ausfallwahrscheinlichkeit charakterisiert. Im Gegensatz dazu liegt der Entwurf mit der kleinsten Streuung  $\mathcal{B}$  am unteren rechten Rand des Entwurfsraumes und weist damit einen großen Mittelwert und eine hohe Ausfallwahrscheinlichkeit auf. Am weitesten entfernt von der begrenzenden Nebenbedingung  $h(\mathbf{p}) = 0$  liegt der Entwurf mit der geringsten Ausfallwahrscheinlichkeit  $\mathcal{C}$ . Das gewählte Knie  $\mathcal{K}$  aller nicht-dominierten Lösungen befindet sich am linken Rand des zulässigen geometrischen Entwurfsraumes und damit wiederum an einer ganz anderen Stelle mit akzeptablen Kriterien Mittelwert, Streuung und Ausfallwahrscheinlichkeit. Für die aerodynamische Verdichterauslegung kann die Problemformulierung daher übernommen werden. Die Wahl der Verfahren ist jedoch extrem problemspezifisch, da zum einen gradientenbasierte Verfahren aufgrund benutzerdefi-

nierter Straftermemethodiken labil und zum anderen Stichprobenerhebungen am physikalischen Modell zu kostenintensiv sind. Hier bilden Ersatzmodelle wie Antwortflächenverfahren in Kombination mit Samplingverfahren ein probates Mittel zur effizienten Güteevaluation.

### Parametrisierung von Verdichterschaufelsektionen

Für die Beschreibung einer Verdichterschaufelsektion, Abbildung 5, existieren mehrere Möglichkeiten. In weiter zurückliegenden Untersuchungen wurde die Parametrisierung der dimensionsbehafteten Kontur über Freiformkurven bevorzugt [2], [3] und [15]. Nach [16] lässt sich die Profilkontur aber auch aus einer Skelettlinie  $f$  und einer dazu rechtwinkelig superponierten Dickenverteilung  $T$  aufbauen. In Anlehnung daran wird in der vorliegenden Untersuchung die Skelettlinienwinkelverteilung  $\beta$  auf die Metallwinkel  $\beta_{I,E}$  an der Vorder- und Hinterkante des Profils normiert und als Funktion der normierten Sehnenlänge  $\tilde{x}$  dargestellt, siehe Abbildung 6:

$$(11) \quad \tilde{\beta}(\tilde{x}) = \frac{\beta_I - \beta(\tilde{x})}{\beta_I - \beta_E} \quad \text{mit} \quad \tilde{x} = \frac{x}{c} \in [0,1].$$

Die Dickenverteilung  $T$  hingegen wird in zwei Bereiche unterteilt und jeweils auf die korrespondierende Dicke  $T_{I,E}$  an der Vorder- bzw. Hinterkante, sowie die maximale Dicke  $T_{max}$  normiert und ebenfalls über der normierten Profilhöhe

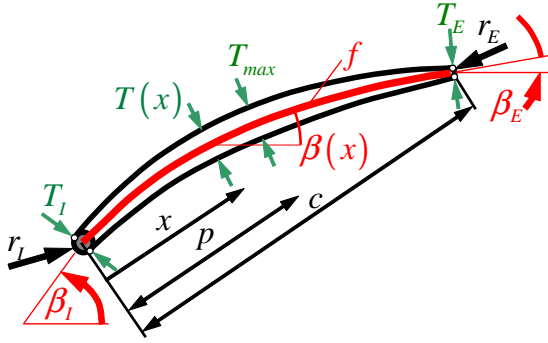


Abbildung 5. Geometrisches Modell einer Verdichterschweifsektion

ne  $\tilde{x}$  aufgetragen, siehe Abbildung 6:

$$(12) \quad \tilde{T}(\tilde{x}) = \begin{cases} \frac{T(\tilde{x}) - T_I}{T_{max} - T_I} & \tilde{x} \leq \tilde{p} \\ \frac{T(\tilde{x}) - T_E}{T_{max} - T_E} & \tilde{x} > \tilde{p} \end{cases}$$

mit der bezogenen Stelle  $\tilde{p} = \frac{p}{c}$  der maximalen Profildicke.

Die Parametrisierung der dimensionslosen Skelettlinienwinkel- und Dickenverteilung für die vorliegende Untersuchung wird aus [1] übernommen. Für die dimensionslose Skelettlinienwinkelverteilung wird eine B-Spline Kurve zweiten Grades mit äquidistantem Knotenvektor und fünf Kontrollpunkten verwendet:

$$(13) \quad \mathbf{C}_{\tilde{\beta}}(u) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{\tilde{\beta}}(u) \\ \tilde{\beta}(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^4 N_{i,2}(u) \mathbf{P}_{\tilde{\beta},i}$$

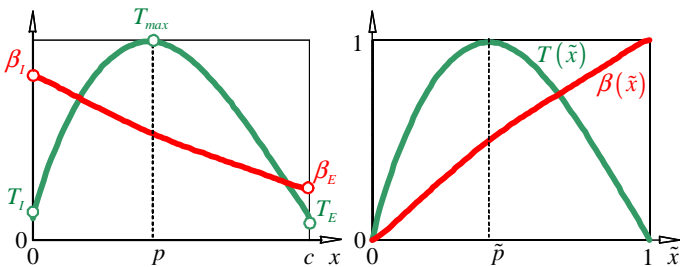


Abbildung 6. Dimensionsbehaftete (links) und dimensionslose (rechts) Skelettlinienwinkel- und Dickenverteilung

mit dem Kurvenparameter  $u \in [0,1]$ , den Basispolynomen  $N_{i,2}$  nach [17], sowie den Kontrollpunkten  $\mathbf{P}_{\tilde{\beta},i}$ , Abbildung 7. Angesichts geometrischer Restriktionen an die Kurve  $\mathbf{C}_{\tilde{\beta}}$  ergeben sich in Summe sechs Freiheitsgrade zusammengefasst in der Kontrollpunktmatrix

$$(14) \quad \mathbf{P}_{\tilde{\beta}} = [\mathbf{P}_{\tilde{\beta},0} \dots \mathbf{P}_{\tilde{\beta},4}] = \begin{bmatrix} 0 & p^{(1)} & p^{(3)} & p^{(5)} & 1 \\ 0 & p^{(2)} & p^{(4)} & p^{(6)} & 1 \end{bmatrix},$$

wobei  $p^{(i)}$  die frei wählbaren Entwurfsvariablen sind. Die dimensionslose Dickenverteilung  $\tilde{T}(\tilde{x})$  ist ebenfalls über eine B-Spline Kurve zweiten Grades, jedoch mit sieben Kontrollpunkten definiert, Abbildung 7:

$$(15) \quad \mathbf{C}_{\tilde{T}}(u) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_T(u) \\ \tilde{T}(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^6 N_{i,2}(u) \mathbf{P}_{\tilde{T},i}.$$

Um Tangentenstetigkeit im Punkt der maximalen Dicke  $\tilde{x} = \tilde{p}$  zu garantieren, benötigt man einen speziellen Knotenvektor

$$(16) \quad U_{\tilde{T}} = [0 \ 0 \ 0 \ 1/4 \ 1/2 \ 1/2 \ 3/4 \ 1 \ 1 \ 1]^T.$$

Unter Berücksichtigung geometrischer Restriktionen ergibt sich damit folgende Kontrollpunktmatrix mit sieben Freiheitsgraden:

$$(17) \quad \mathbf{P}_{\tilde{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\tilde{T},0} & \mathbf{P}_{\tilde{T},1} & \mathbf{P}_{\tilde{T},2} & \mathbf{P}_{\tilde{T},3} & \mathbf{P}_{\tilde{T},4} & \mathbf{P}_{\tilde{T},5} & \mathbf{P}_{\tilde{T},6} \\ 0 & p^{(7)} & p^{(9)} & p^{(10)} & p^{(11)} & p^{(12)} & 1 \\ 0 & p^{(8)} & 1 & 1 & 1 & p^{(13)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Als weiterer Parameter mit signifikantem Einfluss auf die aerodynamische Güte der Sektion wird das Verhältnis der maximalen Dicke zur Profillehne

$$(18) \quad tc = \frac{T_{max}}{c}$$

in den Entwurfsvektor aufgenommen. Weitere Entwurfsvariablen sind die Metallwinkel  $\beta_{l,E}$  an der Vorder- und Hinterkante und ermöglichen eine optimale Positionierung des

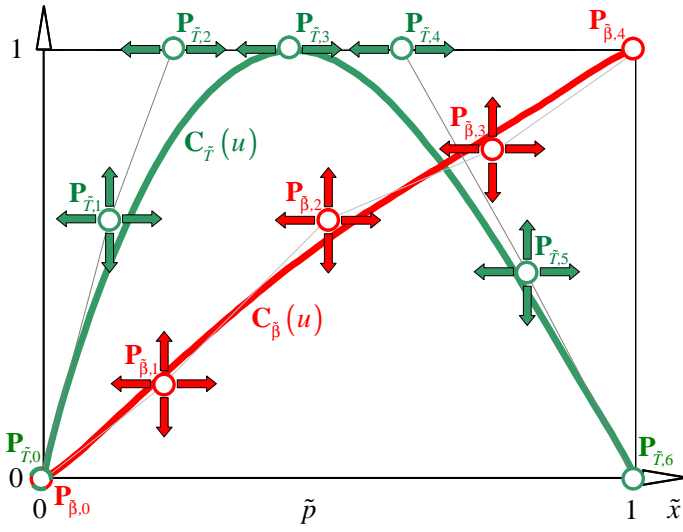


Abbildung 7. Parametrisierte dimensionslose Skelettlinienwinkel- und Dickenverteilungen als B-Spline Kurve

Profils in der Strömung. Durch Normierung aller dimensionsbehafteten Parameter auf das Intervall  $[0, 1]$  unter Vorgabe definierter Grenzen für das Dickenverhältnis und die Metallwinkel, d.h.

$$(19) \quad p^{(14)} = \frac{tc^{min} - tc}{tc^{min} - tc^{max}} \quad \text{und}$$

$$(20) \quad p^{(15,16)} = \frac{\beta_{I,E}^{min} - \beta_{I,E}}{\beta_{I,E}^{min} - \beta_{I,E}^{max}},$$

ergibt sich der resultierende Entwurfsvektor  $\mathbf{p}$  sowie der zulässige geometrische Parameterraum  $\mathcal{G}$  für die Optimierung zu

$$(21) \quad \mathbf{p} = [p^{(1)} \dots p^{(16)}]^T$$

mit

$$(22) \quad \mathcal{G} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{16} \mid h_1(\mathbf{p}) > 0, h_2(\mathbf{p}) > 0, 0 \leq p^{(i)} \leq 1, i = 1(1)16\}.$$

Die Ungleichheitsnebenbedingungen  $h_{1,2} > 0$  sind durch die Forderung motiviert, dass die dimensionslosen Verteilungen der Skelettlinienwinkel  $\tilde{\beta}(\tilde{x})$  und der Dicke  $\tilde{T}(\tilde{x})$

die Eigenschaft einer eindeutigen Abbildung besitzen sollen. Dazu müssen die  $\tilde{x}$ -Werte sowohl für die dimensionslose Skelettlinienwinkelverteilung als auch für die Dickenverteilung monoton ansteigen:

$$(23) \quad h_1(\mathbf{p}) = \frac{d\tilde{x}_{\tilde{\beta}}(u, \mathbf{p})}{du} > 0,$$

$$(24) \quad h_2(\mathbf{p}) = \frac{d\tilde{x}_T(u, \mathbf{p})}{du} > 0$$

für alle  $u \in [0, 1]$ .

### Formulierung der Optimierungsprobleme

Die elementaren Ziele bei der zweidimensionalen aerodynamischen Verdichterschaufelauslegung bestehen darin, einen Entwurf mit bestmöglicher Wirkungsgradcharakteristik sowohl im Auslegungspunkt selbst, als auch über den gesamten Teil- und Überlastbereich zu finden. Zudem wird gefordert, dass die aus der S2-Stromfläche geforderte Strömungsumlenkung für den Auslegungspunkt erreicht wird, um nicht nur den geforderten Druckanstieg zu erzielen, sondern auch die definierte Anströmung der stromab befindlichen Verdichterreihe zu garantieren.

Als Äquivalent für den aerodynamischen Wirkungsgrad der Kaskade wird in der vorliegenden Arbeit der in [4] definierte dimensionslose Verlustbeiwert

$$(25) \quad \omega = \frac{p_{0,E}^{isen} - \bar{p}_{0,E}}{p_{0,I} - p_I}$$

eingeführt mit dem isentropen Totaldruck  $p_{0,E}^{isen}$  am Austritt, dem massengemittelten Totaldruck  $\bar{p}_{0,E}$  am Austritt und dem Totaldruck bzw. statischen Druck  $p_{0,I}$  bzw.  $p_I$  am Eintritt der Kaskade. Zur Quantifizierung der Strömungsumlenkung im Auslegungspunkt wird die Differenz  $\varepsilon$  zwischen gefordertem Abströmwinkel  $\alpha_{E,S1}^{DP}$  und erzieltm Abströmwinkel  $\alpha_{E,S2}^{DP}$  definiert, d.h.

$$(26) \quad \varepsilon = \alpha_{E,S1}^{DP} - \alpha_{E,S2}^{DP},$$

die einen Mindestwert  $\varepsilon^c$  haben muss. Intention der vorliegenden Untersuchung ist, die deterministische Beurteilung des Verlustes und der Abströmung im Auslegungspunkt durch eine probabilistische Bewertung zu ersetzen. Dazu wird zunächst ein unsicherer Anströmwinkel mit vorgegebener normalverteilter Dichtefunktion

$$(27) \quad f_{A_I}(\alpha_I) = \mathcal{N}(\alpha_I^{DP}, \sigma_{A_I}) = \frac{1}{\sigma_{A_I} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_I - \alpha_I^{DP}}{\sigma_{A_I}} \right)^2 \right]$$

angenommen. Über den funktionalen Zusammenhang des Verlustes  $\omega$  und der Abströmung  $\alpha_{E,S1} \equiv \alpha_E$  als Funktion des Anströmwinkels  $\alpha_I$ , d.h.  $\omega = \omega(\alpha_I)$  und  $\alpha_E = \alpha_E(\alpha_I)$ , ergibt sich bei unsicherem Anströmwinkel  $A_I$  entsprechend die unsichere Verlustantwort  $\Omega$ , d.h.  $\Omega = \Omega(A_I)$ , wie auch die unsichere Abströmung  $A_E$ , d.h.  $A_E = A_E(A_I)$ . Damit lassen sich die Dichtefunktionen der unsicheren Systemantworten wie folgt darstellen:

$$(28) \quad \begin{aligned} f_{A_I}(\alpha_I) &\xrightarrow{\omega = \omega(\alpha_I)} f_{\Omega}(\omega) , \\ f_{A_I}(\alpha_I) &\xrightarrow{\alpha_E = \alpha_E(\alpha_I)} f_{A_E}(\alpha_E) . \end{aligned}$$

Ziel ist nun, sowohl den Erwartungswert  $\mu_{\Omega}^{DP}$ , als auch die Standardabweichung  $\sigma_{\Omega}^{DP}$  entsprechend den Gleichungen (5) und (6) der unsicheren Verlustantwort  $\Omega$  um den Auslegungspunkt zu minimieren, um eine möglichst unempfindliche Polare mit minimalem Verlustniveau zu erhalten. Um zuverlässige Entwürfe zu erzwingen, wird die Ausfallwahrscheinlichkeit

$$(29) \quad P_A^f = P[|\varepsilon(\alpha_I)| - \varepsilon^c > 0]$$

ebenfalls in den Gütevektor

$$(30) \quad \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \begin{bmatrix} \mu_{\Omega}^{DP} \\ \sigma_{\Omega}^{DP} \\ P_A^f \end{bmatrix}$$

aufgenommen. Der zulässige Entwurfsraum  $\mathcal{P}$  ist Teilmenge des zulässigen geometrischen Parameterraums  $\mathcal{G}$  und ist gegeben durch

$$(31) \quad \mathcal{P} = \{ \mathcal{G} \mid h_3 \leq 0, \quad P_A^f \leq 0.8 \}$$

mit einer zusätzlichen deterministischen Nebenbedingung  $h_3$ , um die aerodynamische Belastung der Verdichterschau-felsektion respektive Stoßverluste  $\omega^i$  zu begrenzen. Unter Einführung einer oberen Schranke  $\omega_i^c$  gilt:

$$(32) \quad h_3 = \omega_i^{DP} - \omega_i^c .$$

Da eine geschlossene Lösung für den mittleren Verlust  $\mu_{\Omega}^{DP}$  und die Standardabweichung  $\sigma_{\Omega}^{DP}$  der unsicheren Verlustantwort nicht existiert, werden erwartungstreue Schätzer nach Gleichung (5) und (6) verwendet. Ein hinreichend großer Stichprobenumfang mit  $n = 10^6$  garantiert hier vertauenswürdige und reproduzierbare Schätzungen in den Eingangs- wie auch Antwortgrößen [18].

Im Hinblick auf eine zeitlich beschränkte Analysezeit ist die Berechnung von  $n = 10^6$  Anstellwinkelkonfigurationen nicht praktikabel. Ferner wäre eine Abbildung des nichtlinearen Zusammenhangs des Verlustes als Funktion des Anströmwinkels, Gleichung (28), mit hinreichender Genauigkeit in akzeptabler Zeit ebenfalls nicht möglich.

Ein Kompromiss zwischen beschränkter Analysezeit einerseits und geforderter Abbildungsgüte andererseits bietet daher die Verwendung einer Antwortfläche. Idee dabei ist, die exakte Transferfunktion  $\omega = \omega(\alpha_I)$  durch ein deterministisches Modell unter Verwendung vorab berechneter Stützstellen zu approximieren, d.h.

$$(33) \quad \omega(\alpha_I) = \hat{\omega}(\alpha_I) + \varepsilon_{\omega}(\alpha_I)$$

mit der Antwortfläche  $\hat{\omega}$  und dem Approximationsfehler  $\varepsilon_{\omega}$ . Nach [1] liefert hier eine Approximation basierend auf 15 Stützstellen und kubischer Splineinterpolation eine hinreichend genaue Approximationsgüte.

Die Ermittlung der Ausfallwahrscheinlichkeit  $P_A^f$  basiert auf Monte-Carlo-Simulationen und erfolgt ebenfalls auf einer approximierten Antwort des Abströmwinkels als Funktion des Anstellwinkels, d.h.

$$(34) \quad \alpha_E(\alpha_I) = \hat{\alpha}_E(\alpha_I) + \varepsilon_{\alpha_E}(\alpha_I) .$$

Als ein weiterer Aspekt wird im Folgenden ein Problem mit unsicherem Verhältnis der maximalen Dicke zur Profilschne  $tc$  formuliert, die sich aufgrund von Fertigungstoleranzen der parametrisierten Geometrie überlagert. Für die



Dichtefunktion wird wiederum eine Normalverteilung angenommen, d.h.  $f_{TC}(tc) = \mathcal{N}(\mu_{TC}, \sigma_{TC})$ . Die Dichtefunktionen der unsicheren Verlust- und Abströmwinkelantwort lassen sich wie folgt darstellen:

$$(35) \quad \begin{aligned} f_{TC}(tc) &\xrightarrow{\omega=\omega(tc)} f_{\Omega}(\omega) , \\ f_{TC}(tc) &\xrightarrow{\alpha_E=\alpha_E(tc)} f_{A_E}(\alpha_E) . \end{aligned}$$

In Analogie zum unsicheren Anströmwinkel wird nachstehendes Optimierungsproblem definiert:

$$(36) \quad \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \begin{bmatrix} \mu_{\Omega}^{DP} \\ \sigma_{\Omega}^{DP} \\ P_{TC}^f \end{bmatrix}$$

mit dem zulässigen Parameterraum nach Gleichung (31) und der Ausfallwahrscheinlichkeit

$$(37) \quad P_{TC}^f = P[|\varepsilon(tc)| - \varepsilon^c > 0] .$$

Die Ermittlung der Kriterien erfolgt wiederum über *Monte-Carlo-Simulationen* basierend auf approximierten Systemantworten mit fünf Stützstellen:

$$(38) \quad \begin{aligned} \omega(tc) &= \hat{\omega}(tc) + \varepsilon_{\omega}(tc) \\ \alpha_E(tc) &= \hat{\alpha}_E(tc) + \varepsilon_{\alpha_E}(tc) . \end{aligned}$$

### Prozessintegration und Automatisierung

Wichtige Bestandteile der virtuellen Produktentwicklung sind eine robuste und effiziente Prozessintegration sowie eine Automatisierung der Optimierung. Die robuste Kopplung verschiedener Auslegungs- und Analysewerkzeuge, sowohl system- als auch netzwerkübergreifend, ein logisch aufgebauter Prozessfluss und minimaler Datentransfer bilden die Grundlage für eine erfolgreiche Optimierung.

Zur Integration aller für den hier verwendeten Prozess erforderlichen Analyseprogramme dient *iSIGHT-FD* [11]. Der in [1] detailliert beschriebene Prozess zur Umsetzung der im vorangegangenen Kapitel geschilderten Auslegung einer Verdichterschaukelsektion besteht im Wesentlichen aus der Geometrieerzeugung mittels *Matlab* [19] und *Parablading* [20], der aerodynamischen Güteevaluation über *Mises* [4] und der probabilistischen Bewertung in *Matlab*.

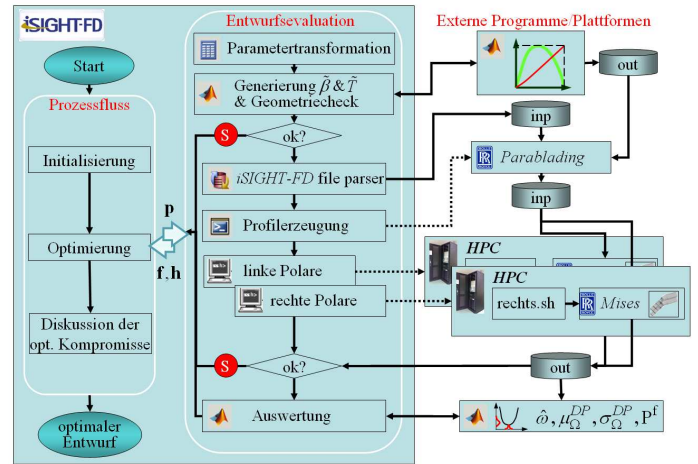


Abbildung 8. Prozess zur zuverlässigkeits- und robustkeitsbasierten Optimierung

Um den Rechenaufwand zu reduzieren, werden die generierten Verteilungen bezüglich geometrischer Restriktionen, d.h. hinsichtlich  $h_{1,2}$ , überprüft. Sind diese verletzt, so werden allen relevanten Optimierungsgrößen benutzerdefinierte Strafterme  $S$  hinzugefügt und die Entwurfsevaluation wird terminiert. Diese Methodik setzt einen robusten Optimierungsalgorithmus voraus und wäre für deterministische Optimierungsverfahren ungeeignet.

Die aerodynamische Güteevaluation erfolgt über ein lösungsunabhängiges, strukturiertes Netz [21] und für verschiedene Anstellwinkel bzw. Dickenverhältnisse. Ist eine numerische Analyse nicht konvergiert, werden wiederum allen wichtigen Optimierungsgrößen benutzerdefinierte Strafterme  $S$  zugefügt, die jedoch kleiner als die obig definierten sind, und der Prozess terminiert. Die Berechnung der sperr- und pumpseitigen Hälfte der Verlustpolaren erfolgt rekursiv und entkoppelt voneinander. Dies ermöglicht eine verteilte Berechnung einerseits und beschleunigte Konvergenz andererseits, da jeweils auf die vorangehende Lösung zurückgegriffen wird, Abbildung 8.

### Optimierungsergebnisse

Für die aerodynamische zuverlässigkeits- und robustkeitsbasierte Mehrkriterien-Optimierung wird in dieser Arbeit exemplarisch eine hochbelastete, transsonische Mittensektion einer Rotorreihe eines bewährten Hochdruckverdichters gewählt. Die relative Anströmmachzahl  $M_I$  liegt im

Bereich von 0.85 und die aus der S2 Rechnung geforderte Strömungsumlenkung im Bereich von 20 Grad.

Unter Berücksichtigung des Vektorkriteriums (30), der benutzerdefinierten Straftermmethodik und inhärenter Probleme bei der numerischen Strömungsfeldanalyse wird der robuste genetische Mehrkriterien-Optimierer AMGA [22] für die Suche nach optimalen Kompromisslösungen eingesetzt. Dieser bietet zudem die Möglichkeit, eine Startpopulation vorzugeben.

In Tabelle 2 sind die Randdaten beider Optimierungen,

AMGA	$f_{A_I}(\alpha_I)$	$f_{TC}(tc)$
Funktionsauswertungen	6500	8000
Populationsgröße	80	80
Archivgröße	250	300
Pareto-Menge	100	100
Ergebnisse		
zulässige Lösungen	3726	6107
Zahl der nicht-dominierenden Entwürfe	105	224

Tabelle 2. Daten zu den Optimierungen

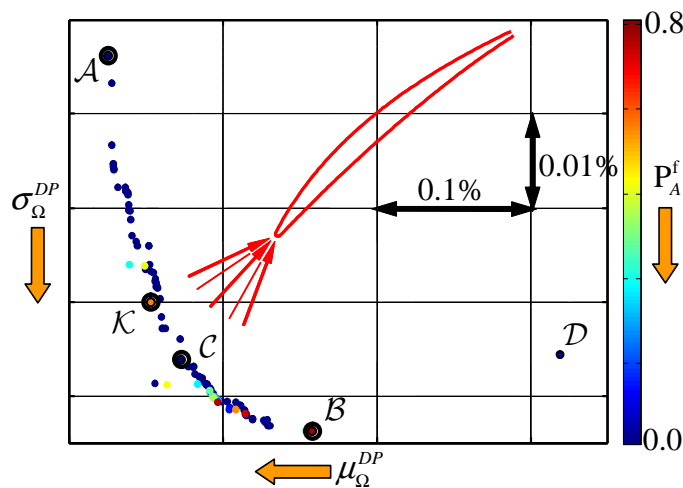


Abbildung 9. Nicht-dominierte Lösungen  $\mathcal{F}^P$  der Mehrkriterien-Optimierung nach Gleichung (30)

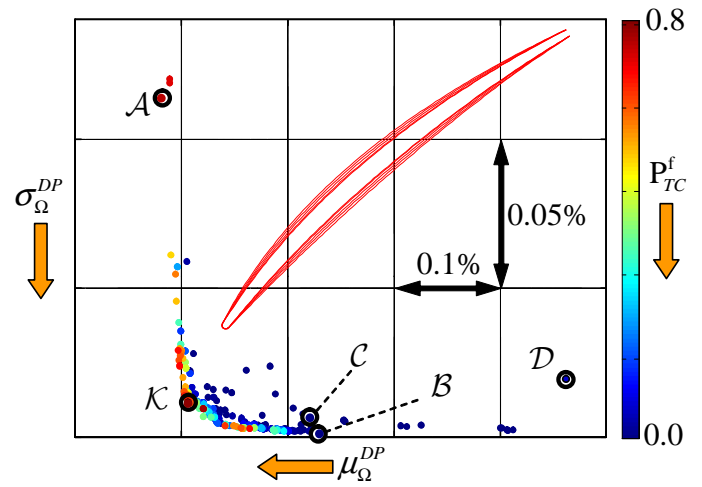


Abbildung 10. Nicht-dominierte Lösungen  $\mathcal{F}^P$  der Mehrkriterien-Optimierung nach Gleichung (36)

nach Gleichungen (30) und (36) dargestellt. Sichere Zahlen zur Abschätzung des zeitlichen Aufwandes unter Verwendung der Ausschussraten infolge der benutzerdefinierten Straftermmethodik sind hier aber erst nach mehreren Optimierungsläufen möglich, da ein genetischer Algorithmus im Gegensatz zu deterministischen Verfahren keine Reproduzierbarkeit der Ergebnisse garantiert.

Abbildungen 9 und 10 zeigen die Pareto-optimalen Lösungen  $\mathcal{F}^P$  der Optimierungen. Im Vergleich zum Referenzentwurf  $\mathcal{D}$  können eindeutig bessere Geometrien gefunden werden. In Analogie zum analytischen Beispiel sind zudem je vier charakteristische Punkte  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{K}$  dargestellt. Die Streuung des Abströmwinkels bei variierender Anströmrichtung ist im Vergleich bei einem unsicheren Dickenverhältnis deutlich geringer. Die Ergebnisse in Abbildung 9 bestätigen weiterhin die in [1] dargestellten Verlustpolaren.

Eine Diskussion der in Abbildung 10 selektierten Entwürfe bestätigt deren Lage im Kriterienraum und zum größten Teil die Widersprüchlichkeit der definierten Kriterien, siehe Abbildung 11 und 12. Im Vergleich zum Referenzentwurf  $\mathcal{D}$  dominieren die Punkte  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  diesen in den Verlustkriterien und in der Abströmwinkelcharakteristik. Die Entwürfe  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{K}$  weisen trotz größerer Streuungen im Vergleich zu  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  optimale Verlustverläufe auf, sind aber gleichzeitig durch sehr hohe Ausfallwahrscheinlichkeiten gekennzeichnet.

Die Frage nach der einen Konfiguration bleibt je nach Anforderung dem Entwurfsingenieur überlassen. Ein nicht-dominierter Entwurf, der sowohl optimale Verlustwerte als auch eine akzeptable Ausfallrate aufweist, könnte hier als vielversprechender Kandidat in Betracht gezogen werden. Eine gezielte Suche in der Menge aller *Pareto-optimaler* Lösungen wäre ratsam, um diesen zu lokalisieren.

Die zukünftige Frage, inwieweit eine Kopplung beider Szenarien, d.h. ein unsicherer Anströmwinkel und ein unsicheres Verhältnis der maximalen Dicke zur Profilsehne, die aerodynamische Güte beeinflusst, zeigt Abbildung 13. Hier ist für den Referenzentwurf eine deterministische Versuchsplanung durchgeführt worden, bei der sowohl Anströmwinkel  $\alpha_I$  als auch Dickenverhältnis  $tc$  variiert werden. Vermerkt sind Parameterbereiche, für welche die Strömungssimulation nicht konvergiert. Qualitativ sichtbar ist zudem die Empfindlichkeit, insbesondere die der Abströmung, beider Größen auf die Kennwerte. Zur effizienten Anwendung einer zuverlässigkeits- und robustheitsbasierten Mehrkriterien-Optimierung stellen leistungsfähige Ersatzmodelle in Verbindung mit Stichprobenverfahren, oder robuste direkte Verfahren, wie das *Directional Sampling*, vielversprechende Möglichkeiten dar, um auch weitere unsichere Parameter mit zu berücksichtigen.

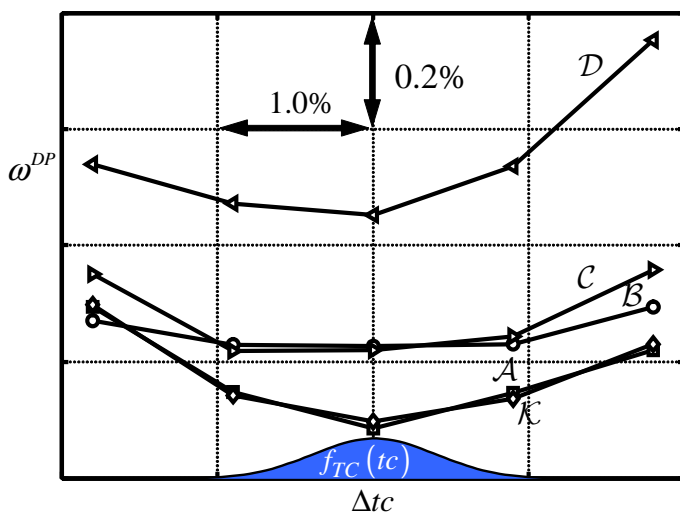


Abbildung 11. Profilverlust als Funktion des Verhältnisses der maximalen Dicke und Profilsehne

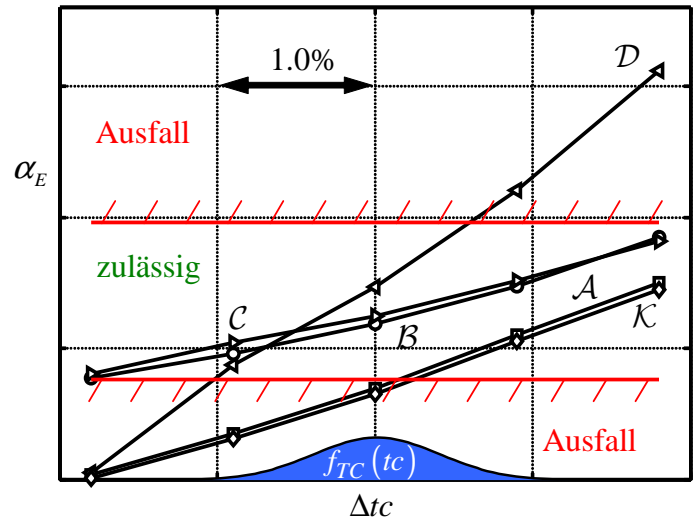


Abbildung 12. Abströmwinkel als Funktion des Verhältnisses der maximalen Dicke und Profilsehne

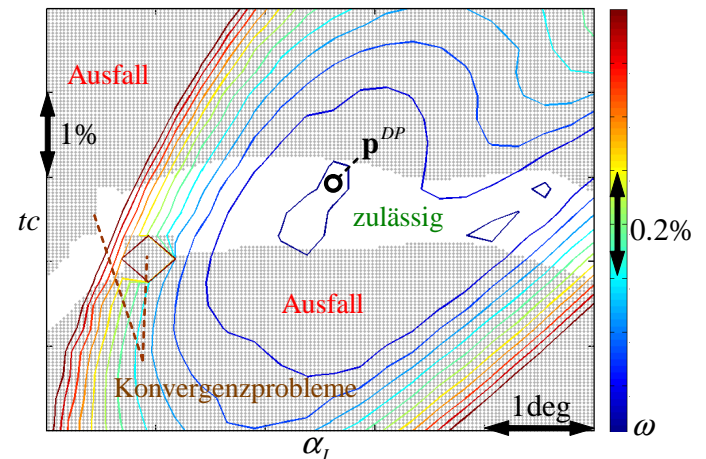


Abbildung 13. Einfluss des Anströmwinkels und des Verhältnisses der maximalen Dicke und Profilsehne hinsichtlich Verlust und Abströmung

### Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des VIT 2 Projektes (Virtuelles Triebwerk) in Zusammenarbeit mit Rolls-Royce Deutschland und wurde zum Teil vom Land Brandenburg finanziert. In hohem Maße sei Rolls-Royce Deutschland für die Genehmigung zur Veröffentlichung dieser Arbeit gedankt. Besonderer Dank gebührt weiterhin Herrn Dr. André Huppertz von Rolls-Royce Deutschland für die zeitnahe Erweiterung der Batch-Fähigkeit und die

Bereitstellung von *Parablading* sowie Herrn Lutz Anklam vom Lehrstuhl Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik.

## Literatur

- [1] P. M. Flassig, A. K. Dutta, and D. Bestle. Robuste Auslegung von Verdichterschaufeln. *Proceedings of DLRK 2008, DLRK2008-081174, Darmstadt*, 2008.
- [2] A. Keskin. *Process Integration and Automated Multi-Objective Optimization Supporting Aerodynamic Compressor Design*. Ph.D. thesis, Shaker, Aachen, 2007.
- [3] D. Büche, G. Guidati, and P. Stoll. Automated Design Optimization of Compressor Blades for Stationary, Large-Scale Turbomachinery. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2003, GT2003-38421*, 2003.
- [4] H. Youngren. Analysis and design of transonic cascades with splitter vanes. GTL Report 203, Cambridge: MIT, 1991.
- [5] A.K. Dutta, P.M. Flassig and D. Bestle. A Non-Dimensional Quasi-3D Blade Design Approach with Respect to Aerodynamic Criteria. *Proceedings of ASME Turbo Expo, GT2008-50687*, 2008.
- [6] R. Y. Rubinstein. *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [7] A. Huppertz, P.M. Flassig, R.J. Flassig and M. Swoboda. Knowledge-Based 2D Blade Design Using Multi-Objective Aerodynamic Optimization and a Neural Network. *Proceedings of ASME Turbo Expo, GT2007-28204*, 2007.
- [8] P. M. Flassig. Knowledge Based Blade Generation with the Objective of an Automatic Aerodynamic Compressor-Design. *Proceedings of ICAS Student Contribution*, 2006.
- [9] A. Der Kiureghian and P.-L. Liu. Structural Reliability Under Incomplete Probability Information. Technical Report CEE-8205049, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1985.
- [10] K. Deb. *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2001.
- [11] Engenious Software Inc. *iSight-FD Version 3.0 User's Guide*, 2008.
- [12] D. Bestle. *Analyse und Optimierung von Mehrkörper-systemen*. Springer, Berlin, 1994.
- [13] M.D. McKay, R.J. Beckmann, and W.J. Conover. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from computer code. *Technometrics* 21(1), 239-245, 1979.
- [14] dynardo, Dynamic Software and Engineering GmbH. *optiSLang, the optimizing Structural Language for Sensitivity Analysis, Multidisciplinary Optimization, Robustness Evaluation and Reliability Analysis, Version 3.0 Alpha*, 2008.
- [15] U. Köller, R. Mönig, B. Küsters, and H.-A. Schreiber. Development of Advanced Compressor Airfoils for Heavy-Duty Gas Turbines - Part I: Design and Opimization. *Journal of Turbomachinery, ASME*, Vol. 122:397–405, 2000.
- [16] I. H. Abbott and A. E. Doenhoff. *Theory of Airfoil Sections*. Dover, 1949.
- [17] L. Piegl and W Tiller. *The NURBS Book*. Springer, Berlin, 2<sup>nd</sup> edition, 1997.
- [18] M. Padulo, M. S. Campobasso, and M. D. Guenov. Comparative Analysis of Uncertainty Propagation Methods for Robust Engineering Design. *International Conferences on Engineering Design, ICED'07*, 2007.
- [19] E. B. Magrab, S. Azarm, B. Balachandran, J. Duncan, K. Herold, and G. Walsh. *An Engineer's Guide to MATLAB*. Prentice Hall, 2<sup>nd</sup> edition, 2004.
- [20] Rolls-Royce Deutschland Ltd & Co KG. *JA81 How-To Manual*, 2007.
- [21] P. M. Flassig. Multi-Objective Compressor Blade Optimisation Using a Non-Dimensional Parameterisation Approach. *CEAS-2007-220, Proceedings of CEAS, Berlin.*, 2007.
- [22] S. Tiwari, P. Koch, G. Fadel, and K. Deb. AMGA: An Archive-based Micro Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization. *Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO), Atlanta, GA, USA*, 2008.