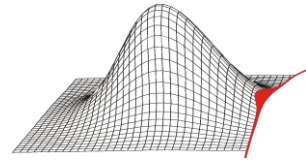


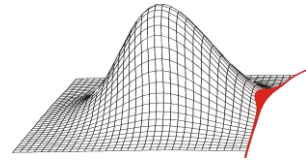
Probabilistische Methoden in der Anwendung

**Matthias Voigt
Robin Schmidt
Thorsten van Lil**

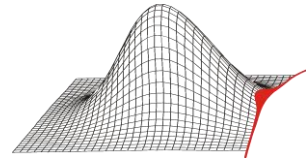




- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- Samplingmethoden
- Regressionen
- Zusammenfassung



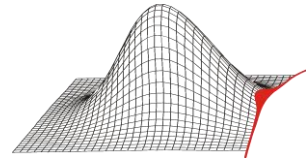
- **Einleitung**
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- Samplingmethoden
- Regressionen
- Zusammenfassung



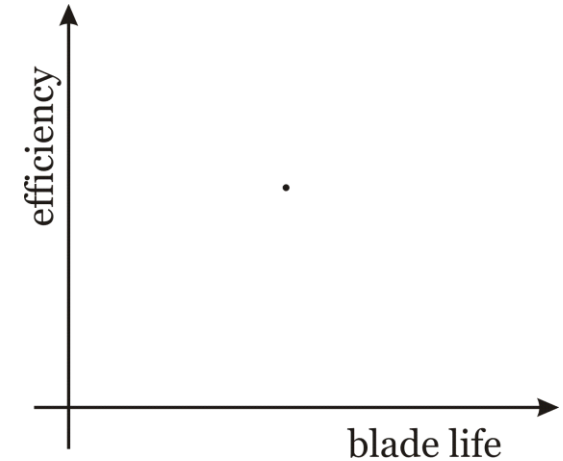
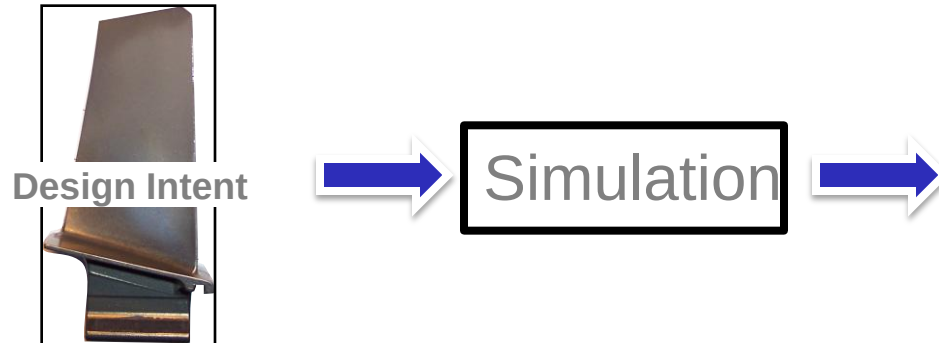
Zwei Turbinenschaufeln aus der gleichen Maschine



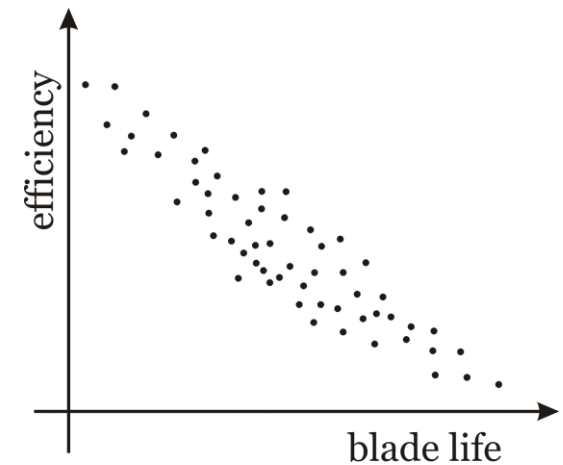
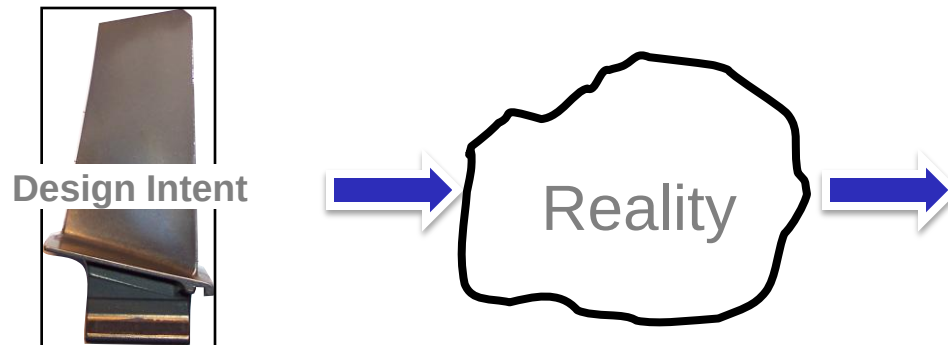
Quelle: Massachusetts Institute of Technology, Prof. David L. Darmofal

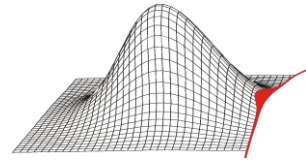


- Klassische deterministische Auslegung



- Wirkliches Verhalten





Stochastik

Lehre der Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit



Kombinatorik

Wie viele Möglichkeiten gibt es, Elemente anzuordnen oder aus einer Menge von Elementen zu ziehen?



Statistik

Ableiten von Gesetzmäßigkeiten und Strukturen aus Ereignissen

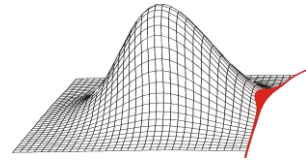


Probabilistik

Definition von Modellen zur Beschreibung von zufälligen Ereignissen

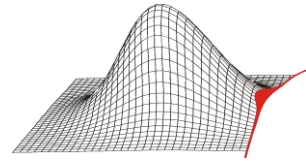


Vorhersagen dieser Ereignisse

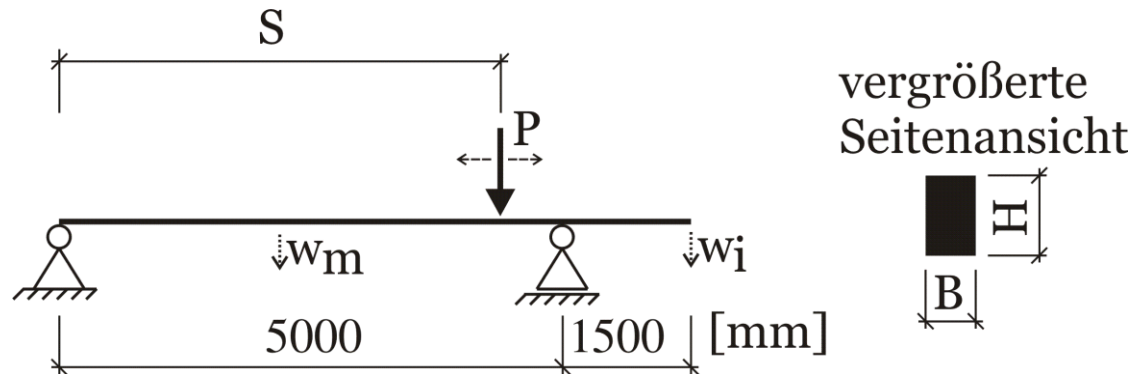


Probabilistische Simulationen von Systemen

Deterministische
Modelle



Träger auf zwei Stützen mit Kragarm

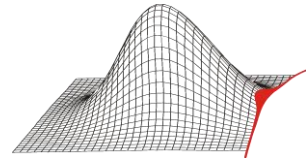


Eingangsgrößen:

- Höhe des Trägers
- Breite des Trägers
- E-Modul
- Punktlast
- Position der Punktlast

Ergebnisgrößen:

Durchbiegungen w_m , w_i

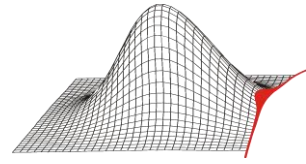


Probabilistische Simulationen von Systemen

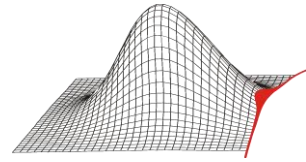
Deterministische
Modelle

Verteilungsart,
Verteilungsparameter,
Korrelationen der
Eingangsgrößen

Probabilistische
Methoden



- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- Samplingmethoden
- Regressionen
- Zusammenfassung



Zufallsexperiment



diskret

Zufallsvariable

stetig



Wahrscheinlichkeitsfunktion

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

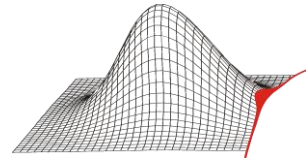


$$F(b) = \sum_{b_{ri} \leq b} f(b_{ri})$$

$$F(b) = \int_{-\infty}^b f(\tilde{b}) d\tilde{b}$$

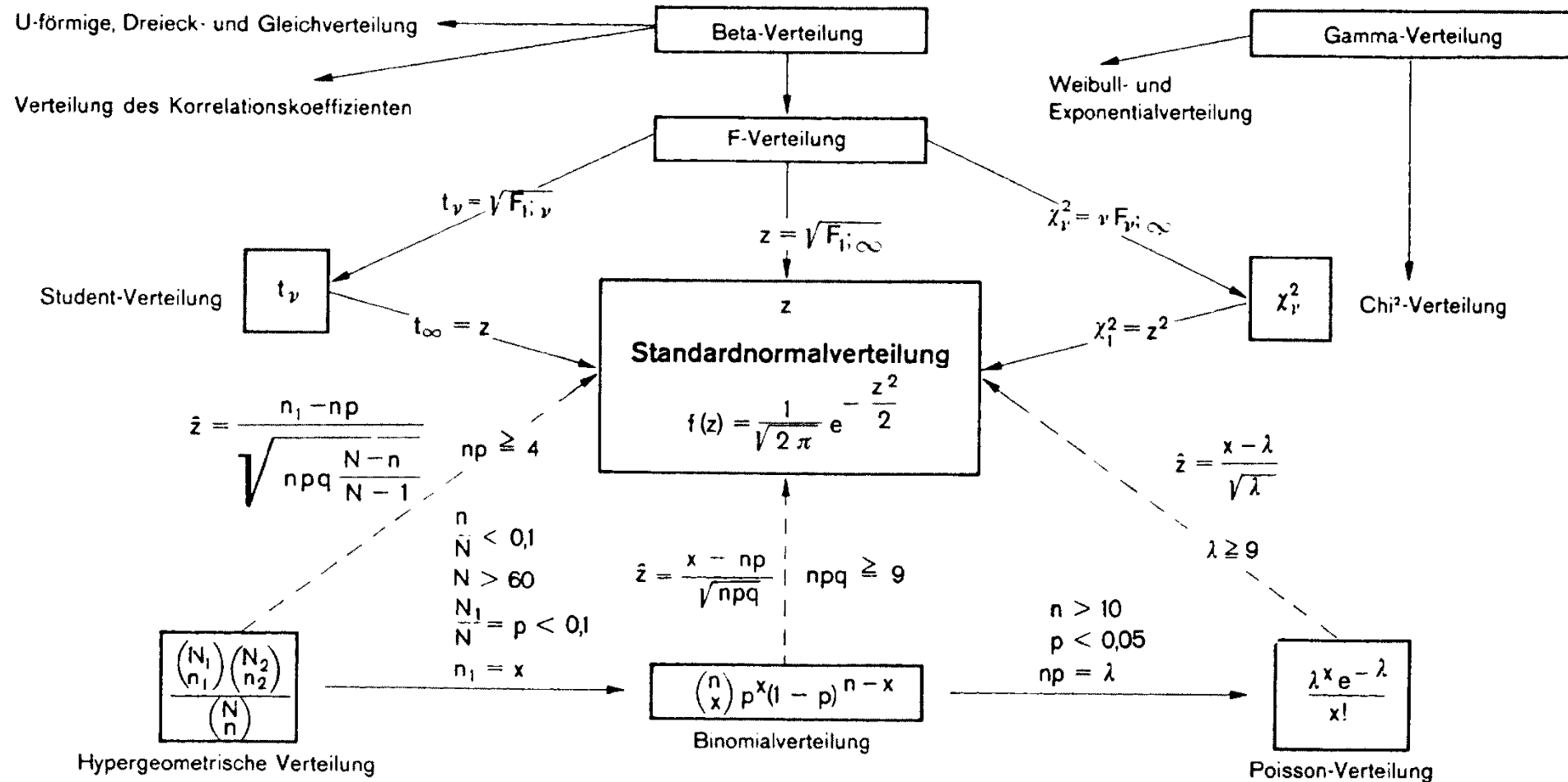


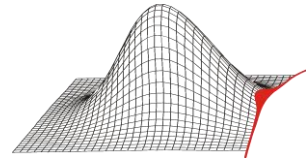
$$F(b) = P(\mathbf{b} \leq b)$$



Übersicht 54. Zusammenhänge zwischen einigen Verteilungen

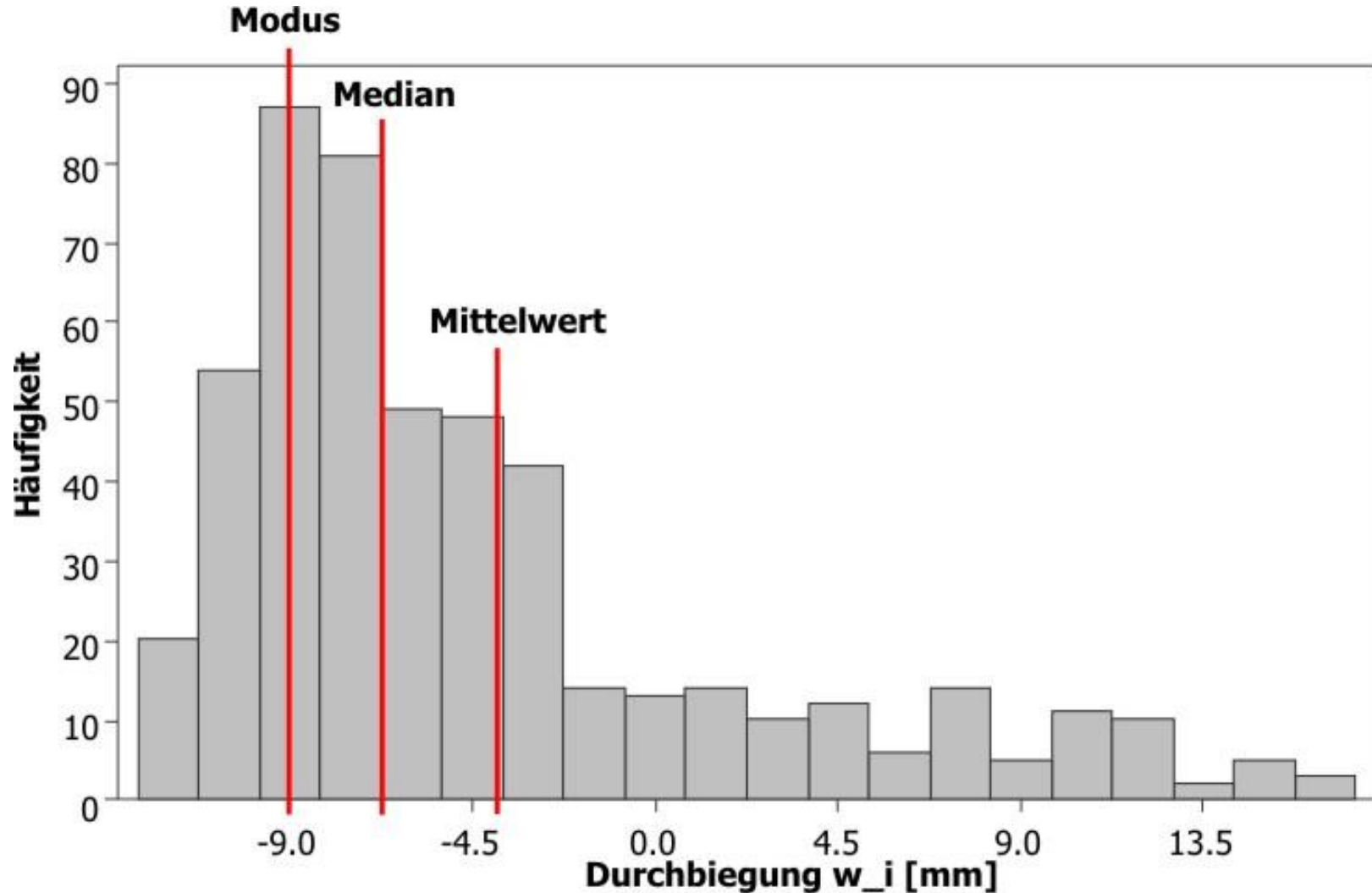
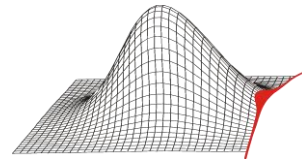
[1]

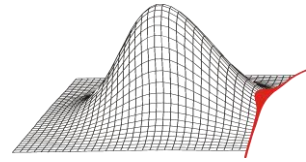




[1]

- Arithmetischer Mittelwert: $\bar{b}_{ri} = \frac{1}{n_{sim}} \sum_{k=1}^{n_{sim}} b_{ri,k}$
 - Flächenschwerpunkt der Fläche unter der Dichtefunktion
 - Stark abhängig von Ausreißern
- Median oder Zentralwert: *Stichprobenwert, der genau in der Mitte einer geordneten Stichprobe steht.*
 - Robustes Lagemaß
- Modulwert oder Modus: *Ausprägung mit der größten Häufigkeit*
 - Nur eindeutig, wenn die Häufigkeitsverteilung ein eindeutiges Maximum aufweist





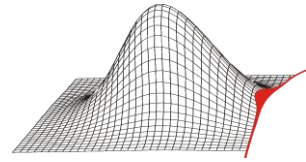
Standardabweichung:

[1]

$$\sigma(\mathbf{b}_{ri}) = \sqrt{Var(\mathbf{b}_{ri})} = \sqrt{\frac{1}{n_{sim} - 1} \sum_{k=1}^{n_{sim}} (b_{ri,k} - \bar{b}_{ri})^2}$$

Variationskoeffizient:

$$\delta(\mathbf{b}_{ri}) = \frac{\sigma(\mathbf{b}_{ri})}{\bar{b}_{ri}}$$

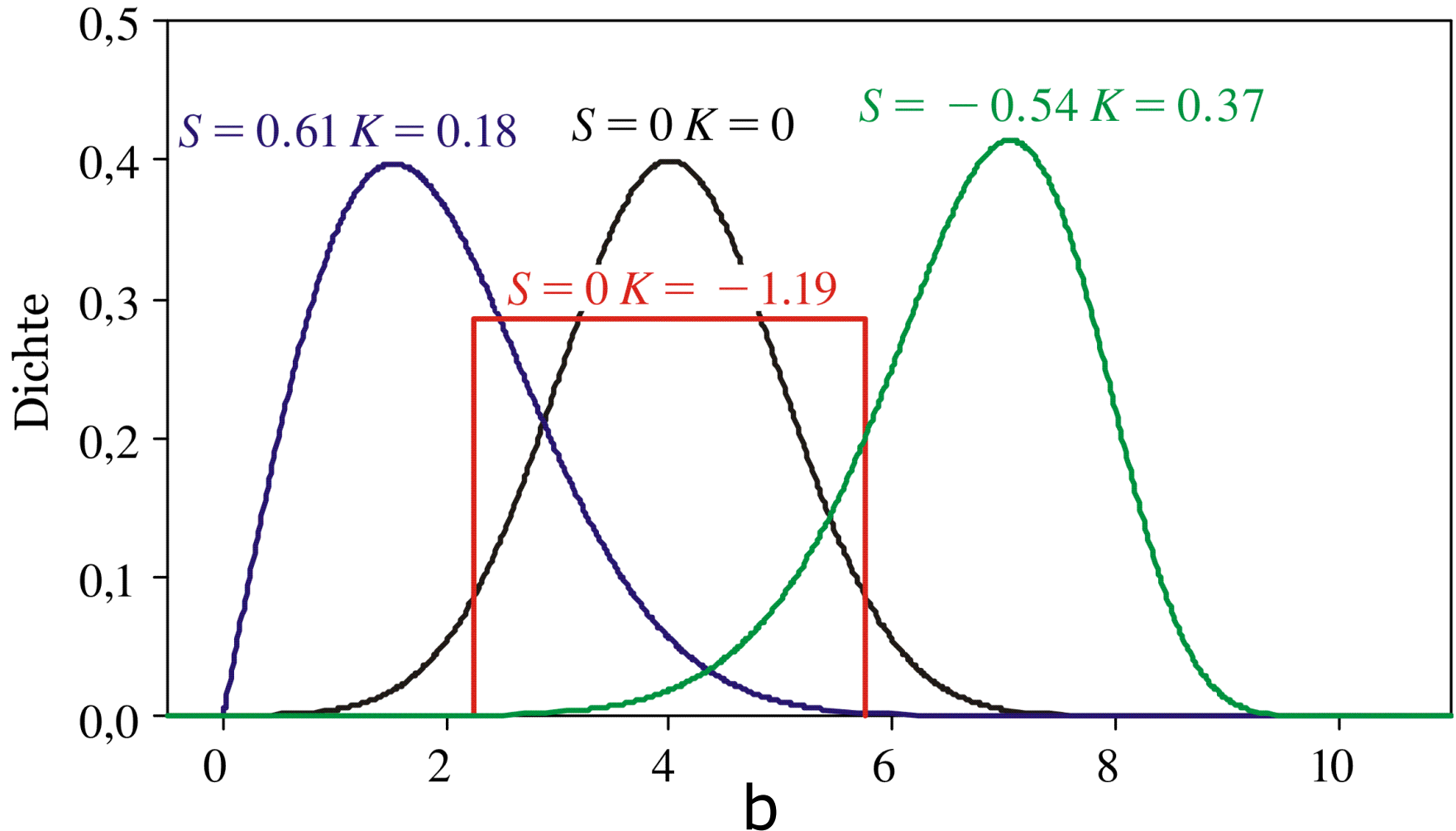
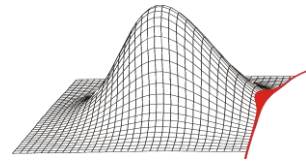


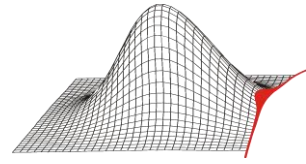
Schiefe: *Grad der Asymmetrie einer Verteilung um den [1]
Median*

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{n_{sim}} (b_{ri} - \bar{b}_{ri})^3}{n_{sim} * \sigma^3}$$

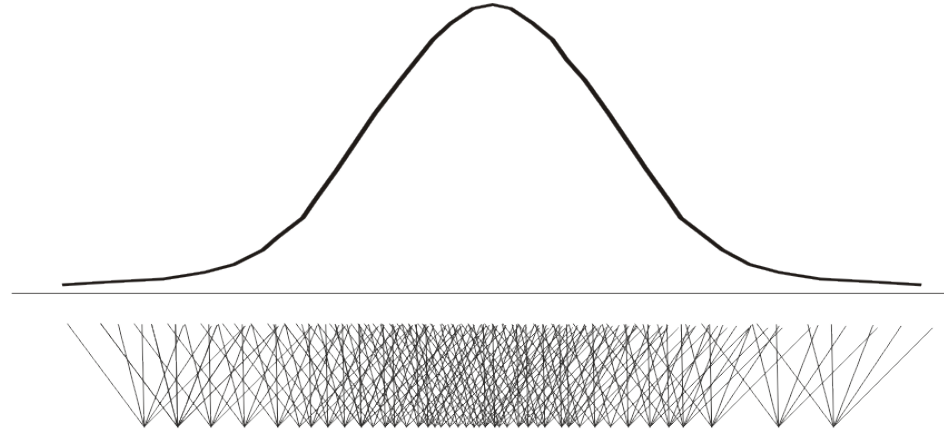
Wölbung: *Grad der Flachheit/Steilheit einer Verteilung*

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n_{sim}} (b_{ri} - \bar{b}_{ri})^4}{n_{sim} * \sigma^4} - 3$$

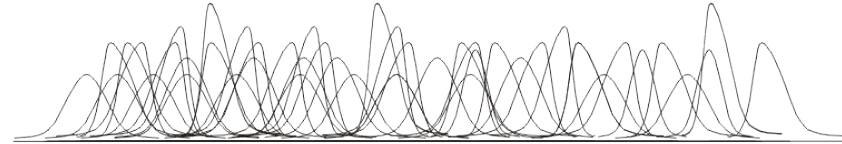




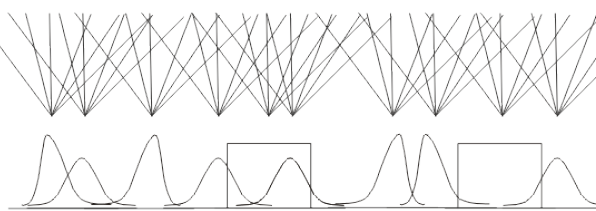
Alter



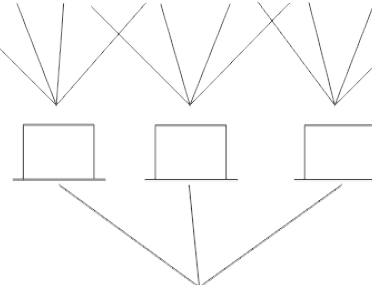
Beschichtung

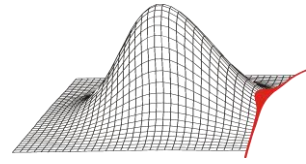


Ausformwerkzeug,
Konfiguration, Charge

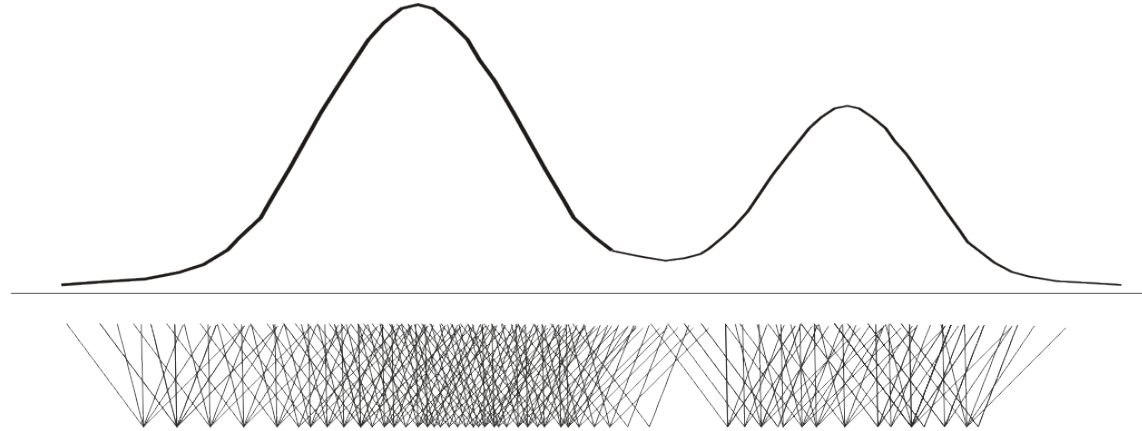


Hersteller

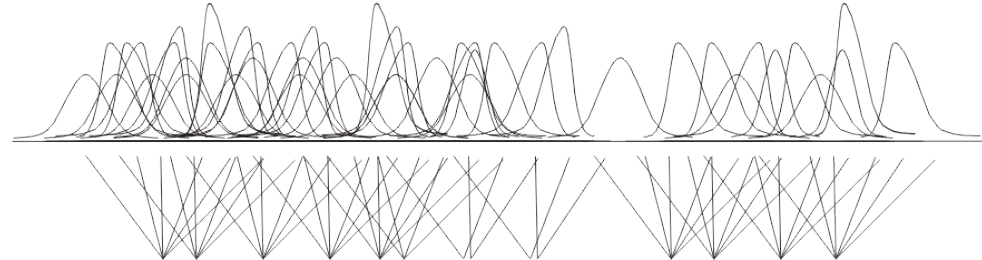




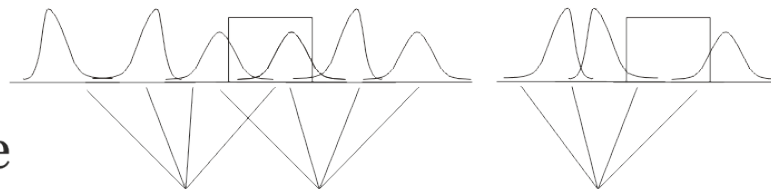
Alter



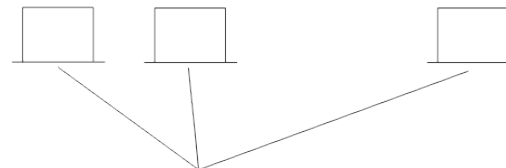
Beschichtung

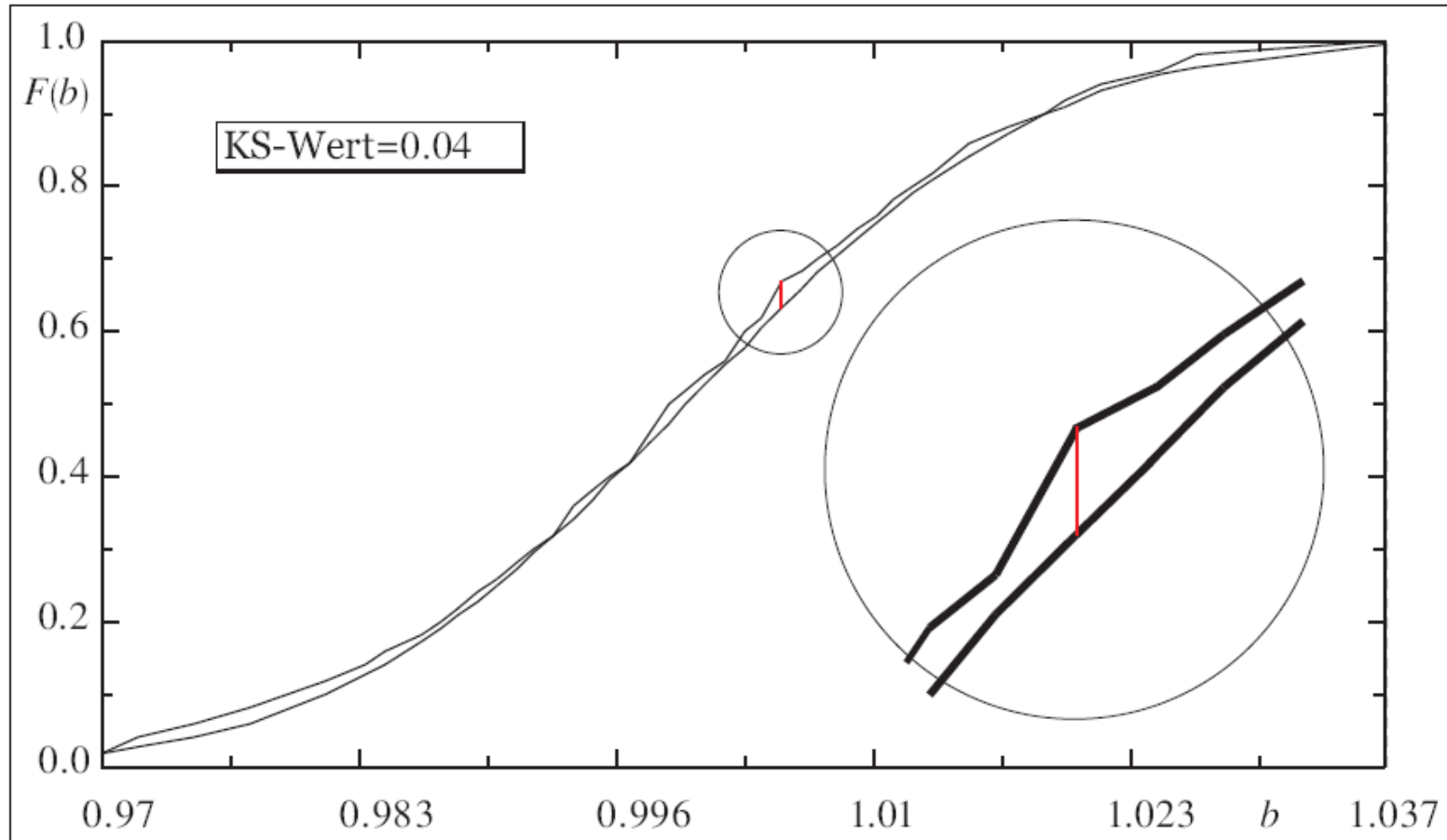
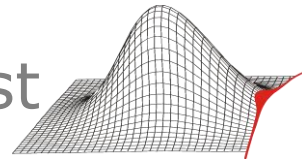


Ausformwerkzeug,
Konfiguration, Charge

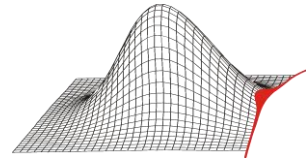


Hersteller





$$KS = \max_{-\infty < b_k < \infty} |F_d(b_k) - F_s(b_k)|$$

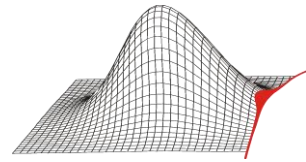


Der Anderson-Darling-Test ist eine Modifikation des [10]
Kolmogorow-Smirnow-Anpassungstests.

Die Abweichungen der Testverteilung von der Zielverteilung werden in den Randbereichen der Verteilungen höher und im Mittelbereich der Verteilung niedriger gewichtet.

$$A^2 = -n_{sim} - \frac{1}{n_{sim}} \sum_k^{n_{sim}} (2k - 1) (\ln F_s(b_k) + \ln(1 - F_s(b_{n_{sim}+1-k})))$$

Kritische Werte für A sind abhängig von der verwendeten Verteilungsfunktion F_s . Tabellierte Werte für A für verschiedene Verteilungsfunktionen sind z.B. in [11] veröffentlicht.



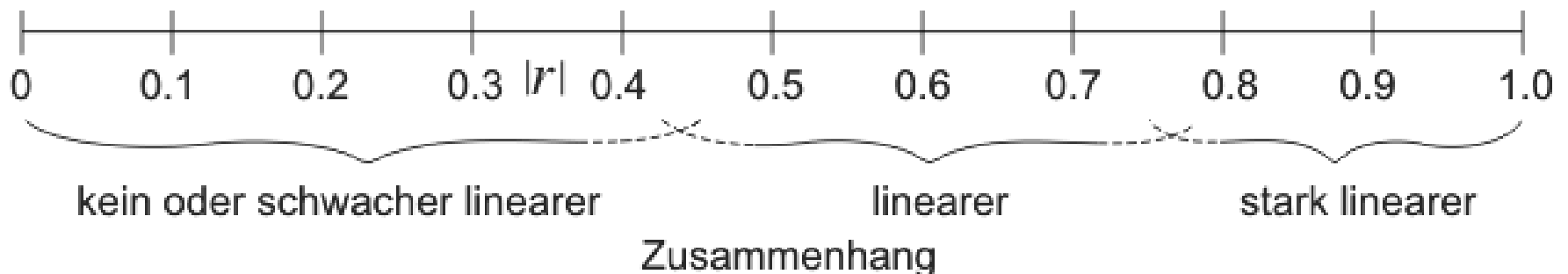
Korrelationskoeffizient nach Pearson

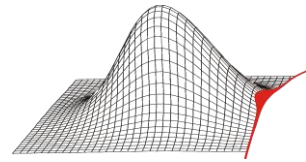
[1]

$$r_{\mathbf{b}_{ri}, \mathbf{b}_{rj}} = \frac{Cov(\mathbf{b}_{ri}, \mathbf{b}_{rj})}{\sqrt{Var(\mathbf{b}_{ri})} \sqrt{Var(\mathbf{b}_{rj})}}$$

$$Cov(\mathbf{b}_{ri}, \mathbf{b}_{rj}) = \frac{1}{n_{sim} - 1} \sum_{k=1}^{n_{sim}} (b_{ri,k} - \bar{b}_{ri})(b_{rj,k} - \bar{b}_{rj})$$

Wertebereich: [-1,1]





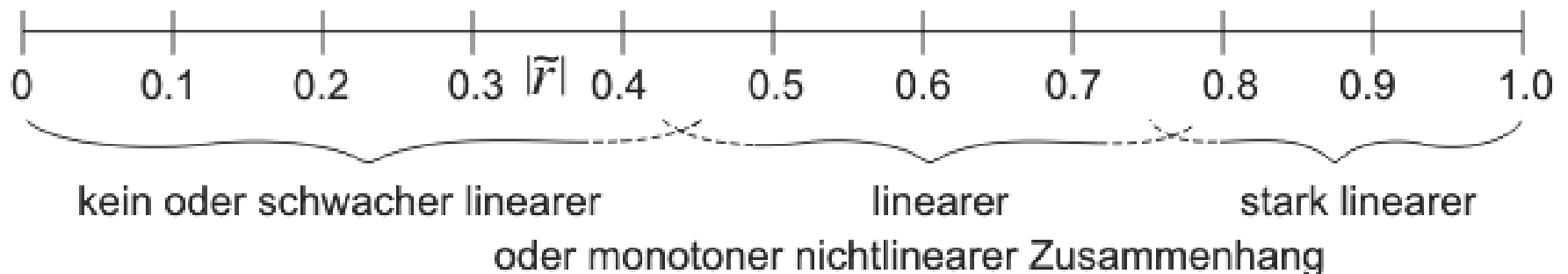
Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman

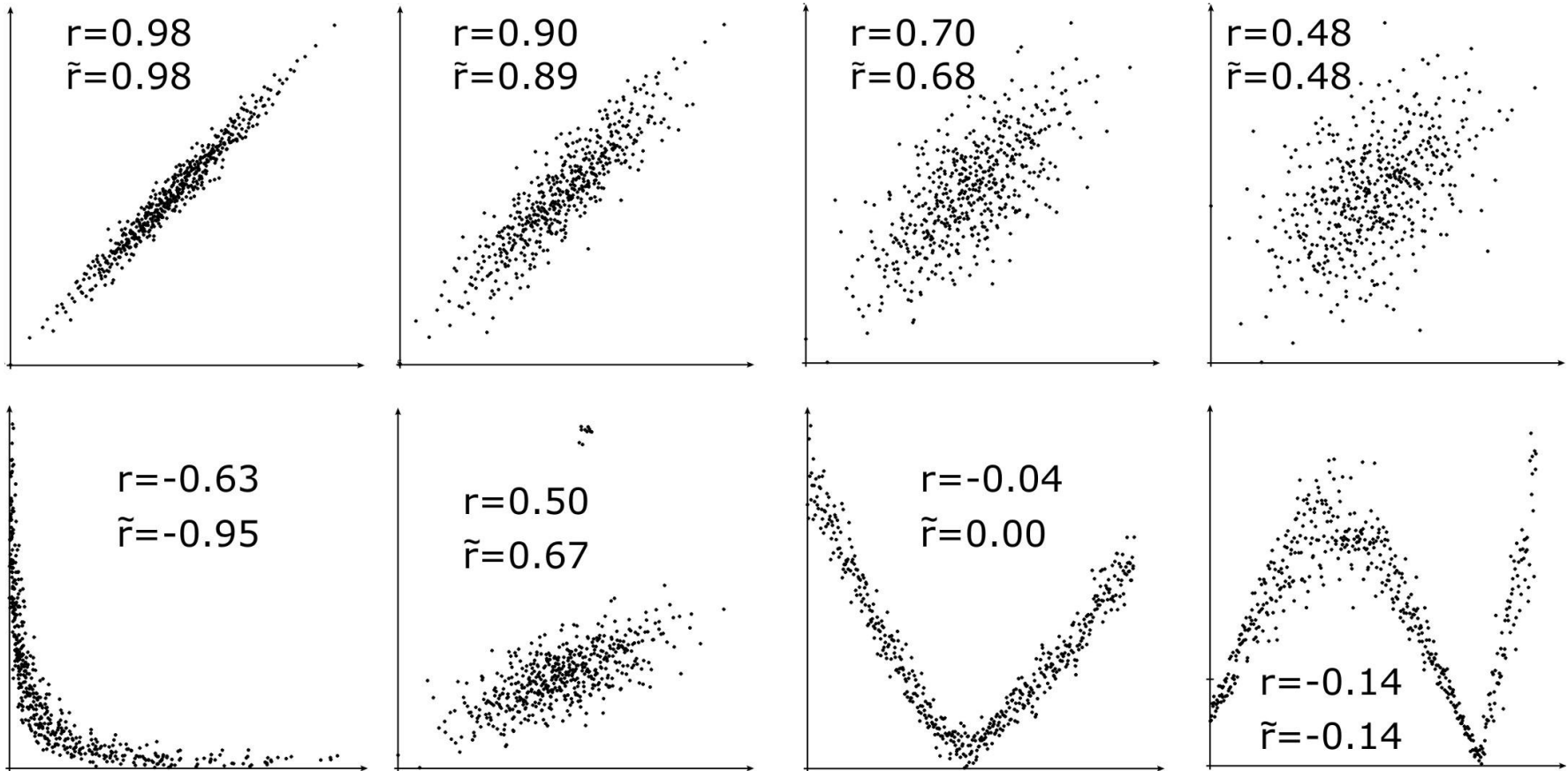
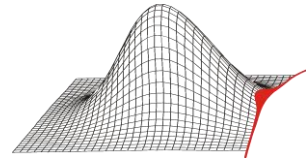
[1]

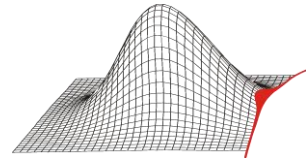
$$\mathbf{b}_{ri} = \begin{bmatrix} b_{ri,1} \\ \vdots \\ b_{ri,n_{sim}} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(\mathbf{b}_{ri}) = \begin{bmatrix} R_{b_{ri,1}} = \text{Rang von } b_{ri,1} \text{ in } \mathbf{b}_{ri} \\ \vdots \\ R_{b_{ri,n_{sim}}} = \text{Rang von } b_{ri,n_{sim}} \text{ in } \mathbf{b}_{ri} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{r}_{\mathbf{b}_{ri}\mathbf{b}_{rj}} = \frac{\sum_{k=1}^{n_{sim}} (R_{b_{ri,k}} - \bar{R}_{b_{ri}})(R_{b_{rj,k}} - \bar{R}_{b_{rj}})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n_{sim}} (R_{b_{ri,k}} - \bar{R}_{b_{ri}})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n_{sim}} (R_{b_{rj,k}} - \bar{R}_{b_{rj}})^2}}$$

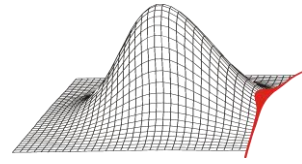
Wertebereich: [-1,1]



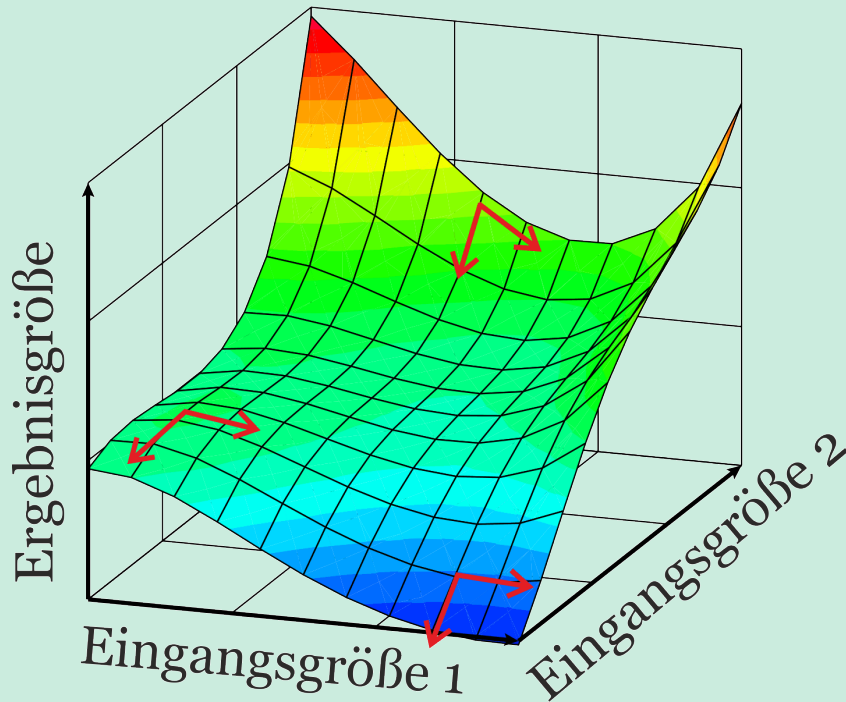




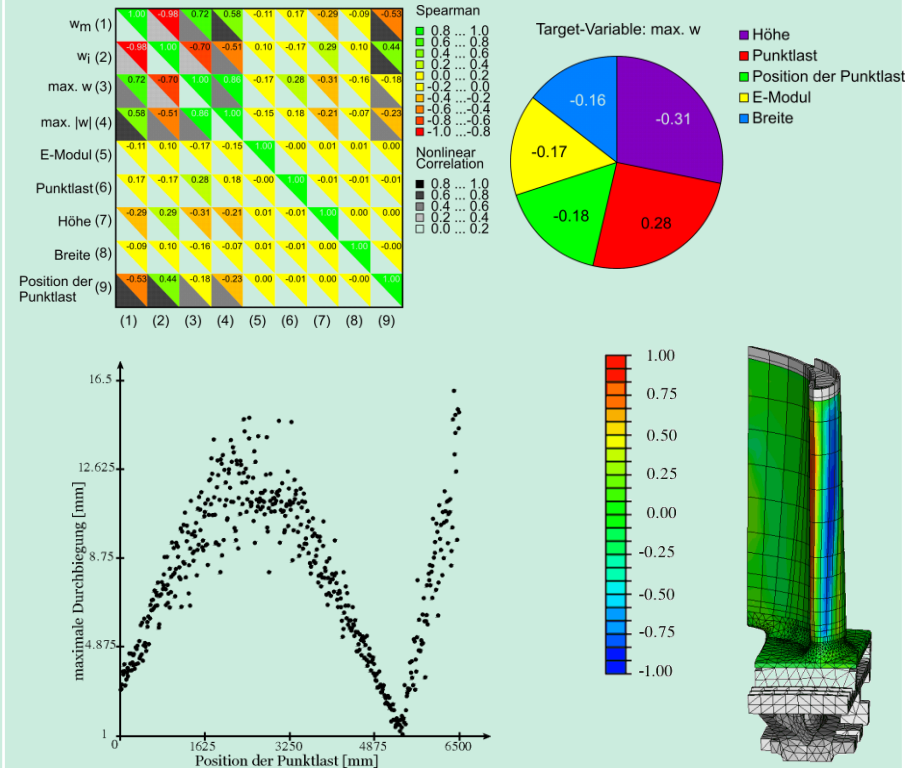
deterministisch	probabilistisch
Ableitungsbasierte Analyse	Varianzbasierte Analyse
Sensitivität aufgrund des partiellen Einflusses der Eingangsgröße am jeweils untersuchten Ort	Sensitivität aufgrund der Variation der Eingangsgröße und ihren mittleren Einfluss im Streubereich
$\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}_{ri,k}}$	$r_{\mathbf{b}_{ri}\mathbf{b}_{rj}} = \frac{Cov(\mathbf{b}_{ri}, \mathbf{b}_{rj})}{\sqrt{Var(\mathbf{b}_{ri})}\sqrt{Var(\mathbf{b}_{rj})}}$

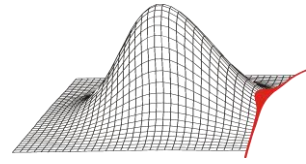


deterministisch

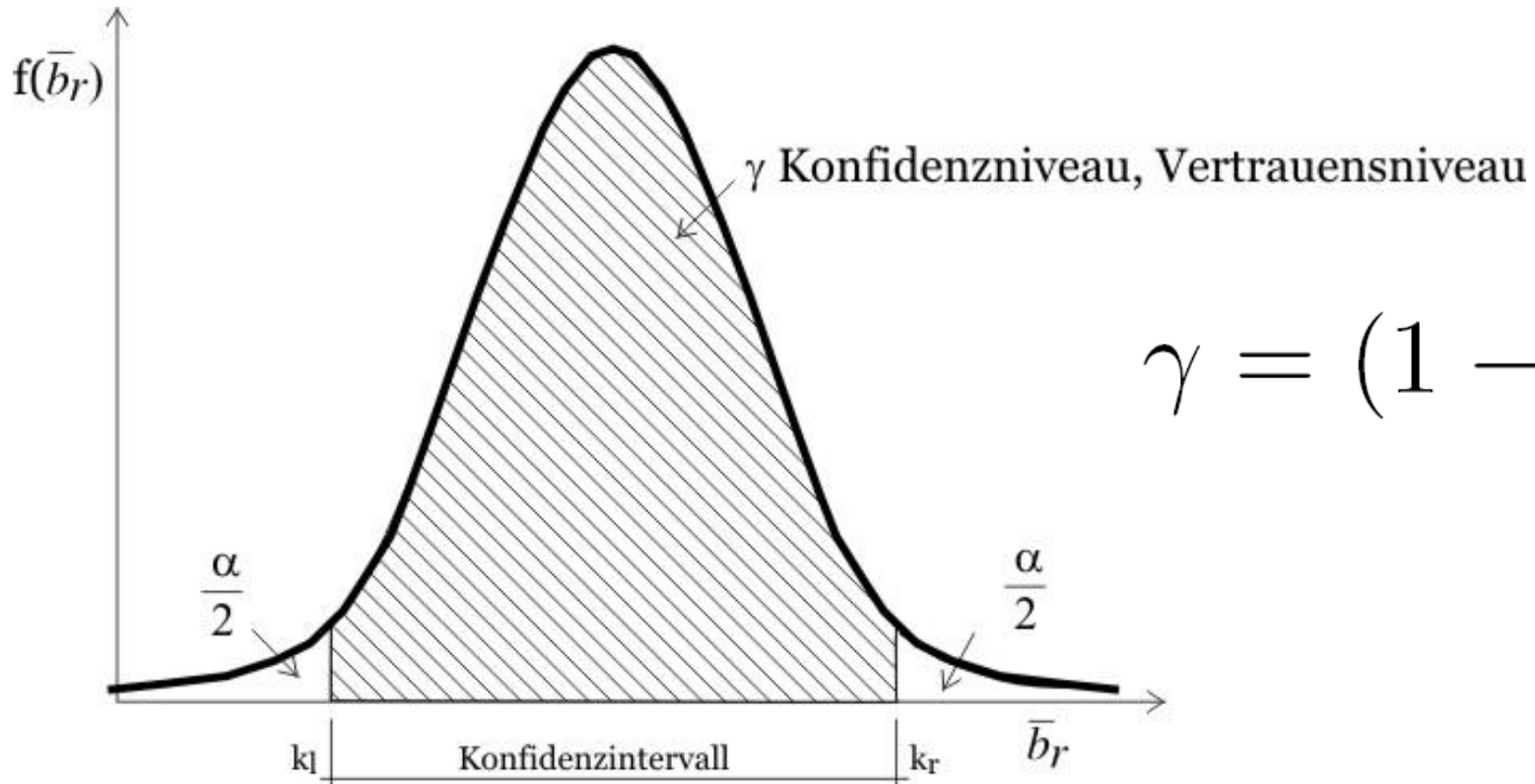


probabilistisch

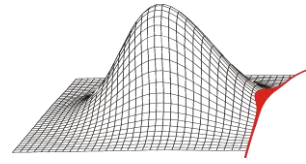




- Statistische Maße (z.B. Mittelwert, Standardabweichung ...) sind Punktschätzungen → enthalten keine Aussage über die Güte der Schätzung



$$\gamma = (1 - \alpha)$$



Relative Häufigkeit des Ereignisses n_f

$$\hat{p} = \frac{n_f}{n_{sim}}; \quad \hat{p} \rightarrow p \quad \text{sobald } n_{sim} \rightarrow \infty$$

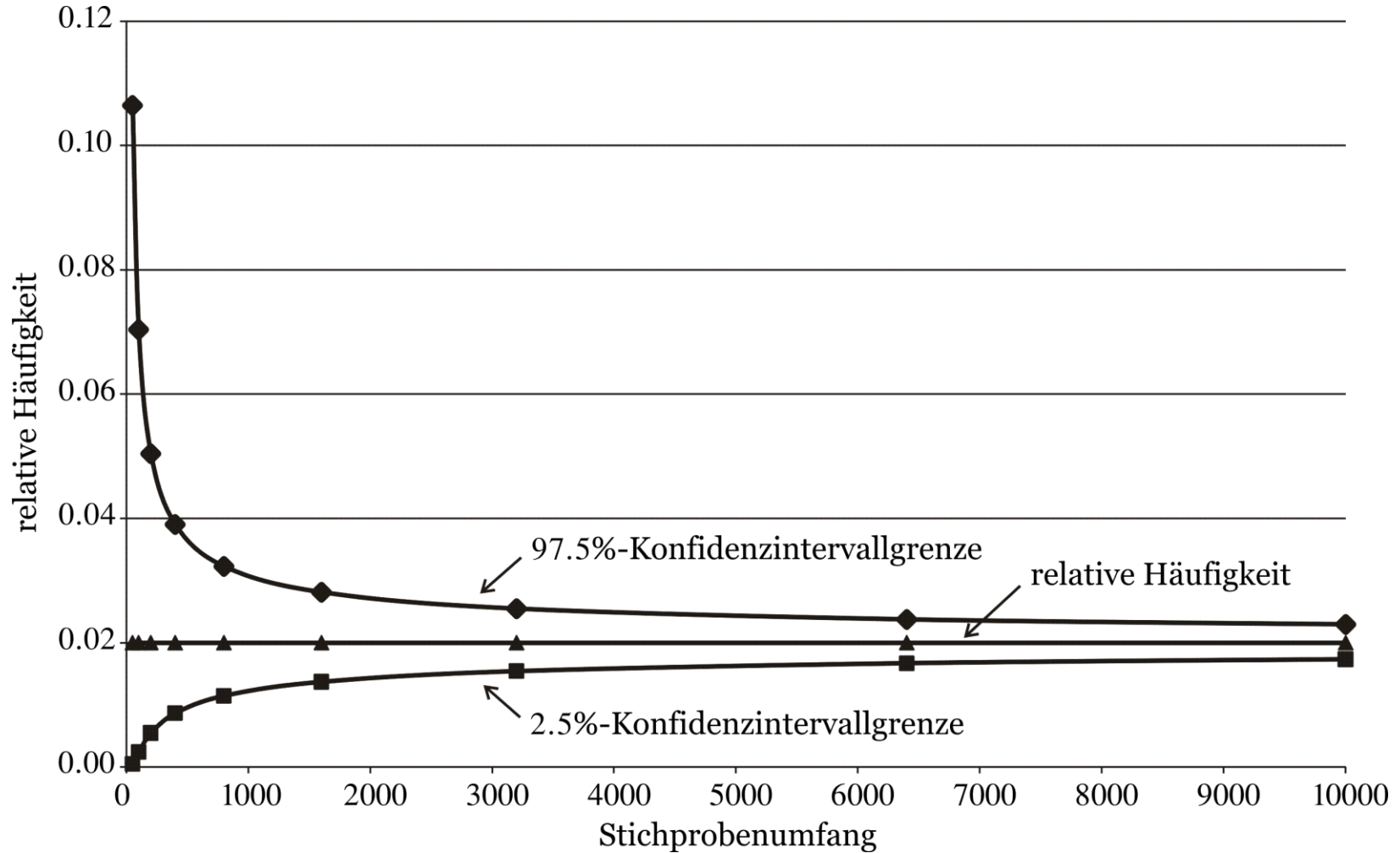
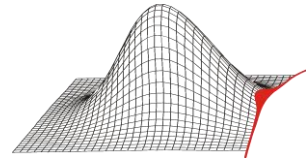
[1]

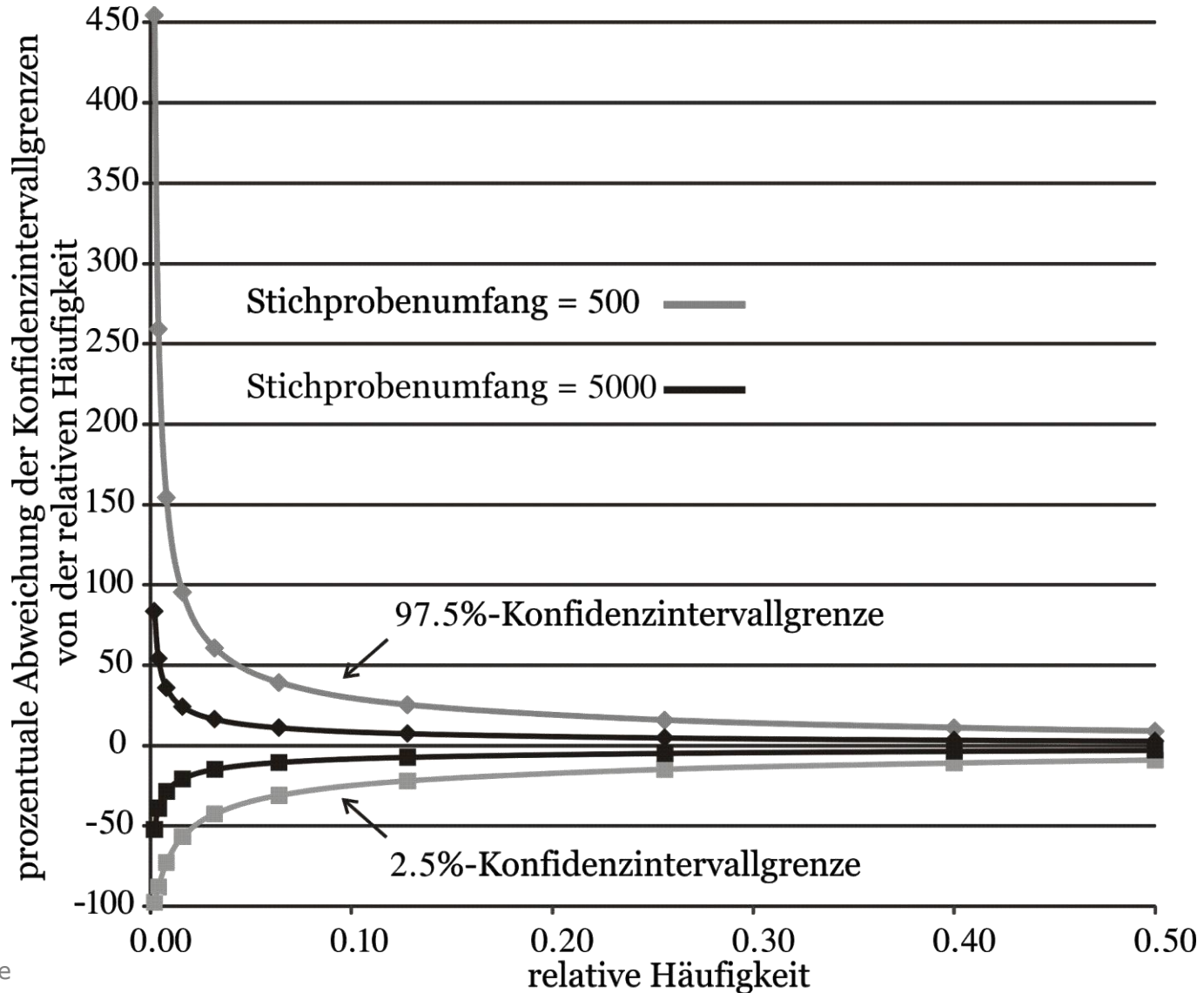
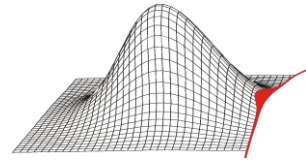
Linke Grenze:

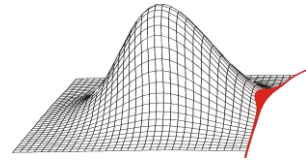
$$\frac{n_f}{n_f + (n_{sim} - n_f + 1) F_{\frac{\alpha}{2}; 2(n_{sim} - n_f + 1); 2n_f}}$$

Rechte Grenze:

$$\frac{(n_f + 1) F_{\frac{\alpha}{2}; 2(n_f + 1); 2(n_{sim} - n_f)}}{n_{sim} - n_f + (n_f + 1) F_{\frac{\alpha}{2}; 2(n_f + 1); 2(n_{sim} - n_f)}}$$







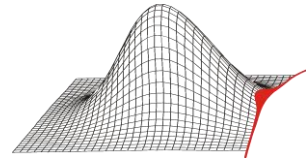
Weicht der Korrelationskoeffizient statistisch signifikant von Null ab, unterscheidet sich seine Verteilung von der Normalverteilung [1].

$$\dot{z} = \operatorname{arctanh} r \quad [3]$$

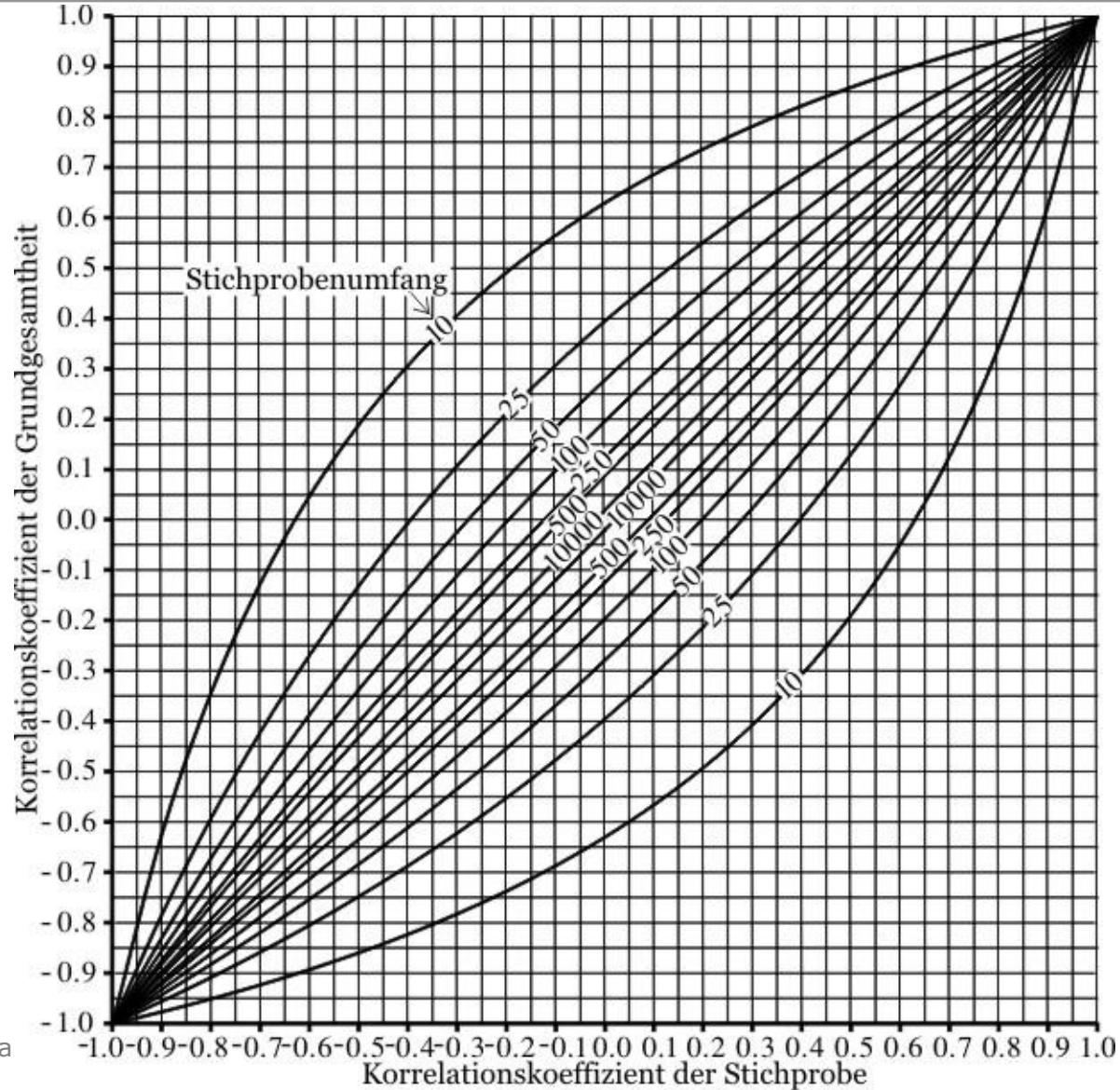
$$\dot{k}_l = \dot{z} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n_{sim} - 3}}, \dot{k}_r = \dot{z} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n_{sim} - 3}}$$

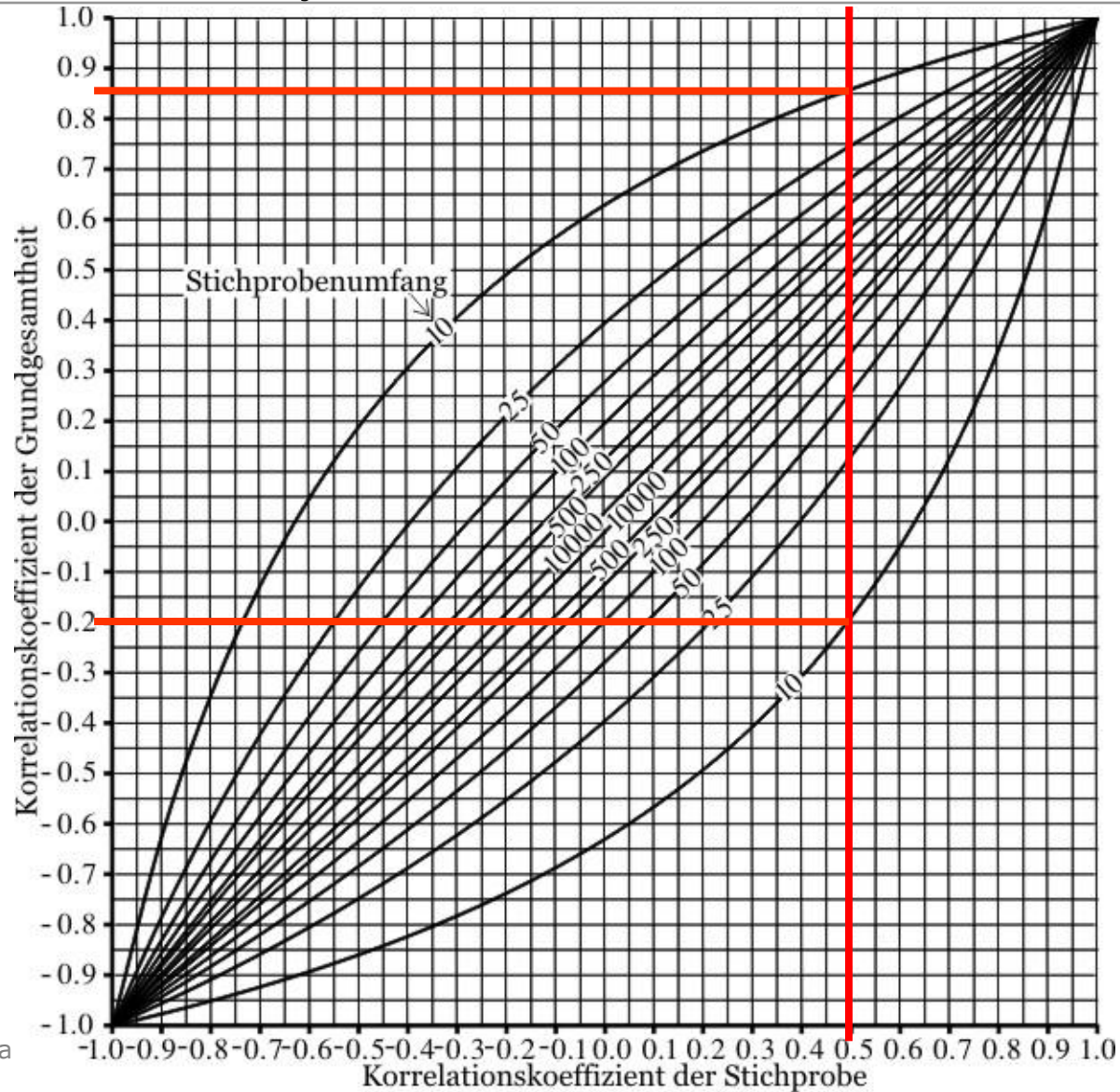
$$k_l = \tanh \dot{k}_l$$

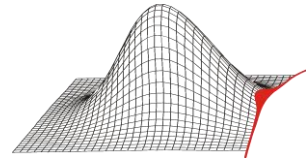
$$k_r = \tanh \dot{k}_r$$



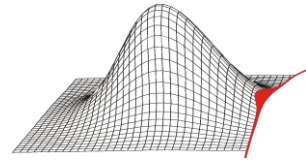
$(\alpha=0.05)$



$(\alpha=0.05)$ 



- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- **Samplingmethoden**
- Regressionen
- Zusammenfassung



Datenerfassung

Vermessung von:
Turbinenschaufeln
Verdichterschaufeln

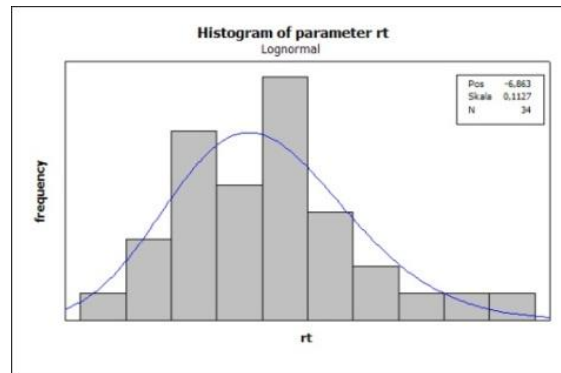


Quelle:
Rolls-Royce

Geometrie- und
Prozessdaten von:
Getriebeverdichtern
Feinguss von Turbinen-
schaufeln

Auswertung
charakteristischer
Parameter

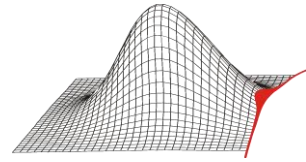
Parametrisierung
Bestimmung der Verteilung
der Parameter



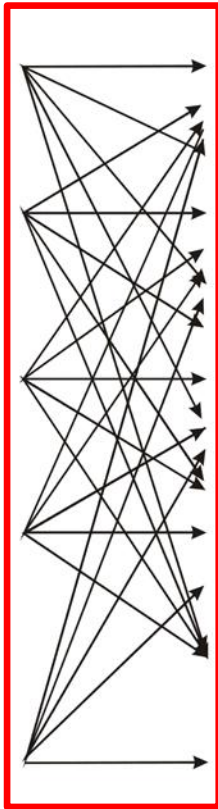
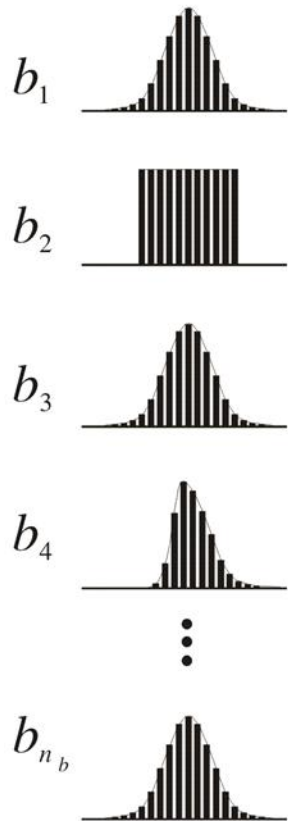
Probabilistische
Untersuchung

Untersuchung des
Systemverhaltens mittels
Prob. Methoden:
MONTE CARLO VERFAHREN

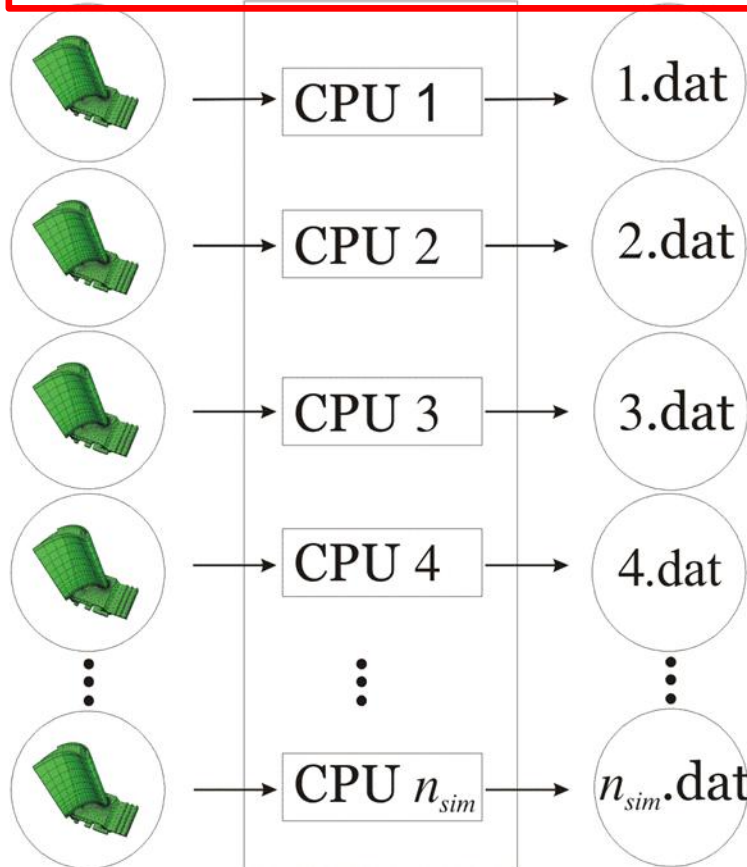
Neuaufbau der
Verteilungen
mittels
Zufallszahlen



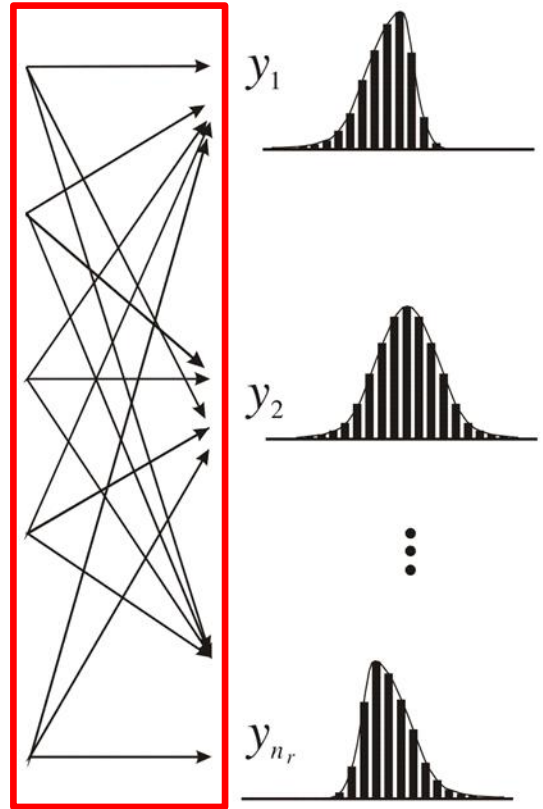
stoch. Variablen

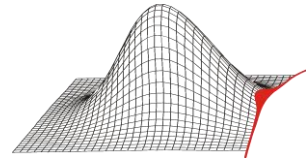


n_{sim} unabhängige Strukturanalysen



Ergebnisgrößen



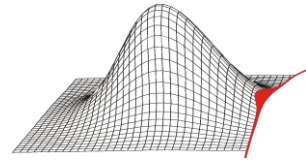


Was sind Zufallszahlen?

- Echte Zufallszahlen resultieren aus physikalischen Prozessen -> phys. Zufallsgeneratoren
- Reale Anwendungen nutzen Pseudozufallszahlen

Pseudozufallszahlen

- Basieren auf mathematischen Formulierungen
- Besitzen ähnliche Eigenschaften wie echte Zufallszahlen



Linearer Kongruenzgenerator

- Gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall $[0,1[$
- Algorithmus:

$$B_{k+1} = (aB_k + c) \bmod M \quad \text{mit } k = 1, \dots, n_{sim}$$

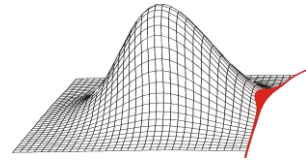
M – Periode der Folge, Bsp. 2147483648

a – teilerfremd zu M , zwischen 1 und $M - 1$, Bsp. 1103515245

c – ganze pos. Zahl kleiner M , Bsp. 12345

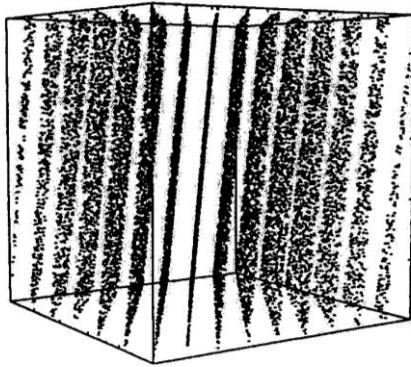
$$b_k = \frac{B_k}{M}$$

B_1 – Startwert, eine Zahl zw. 0 und $M-1$



Linearer Kongruenzgenerator

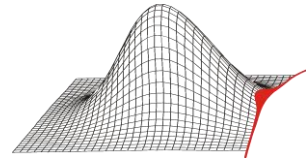
- Hyperebenen Verhalten von n -Tupeln im $\mathbb{R}^n$



IBM RANDU Generator

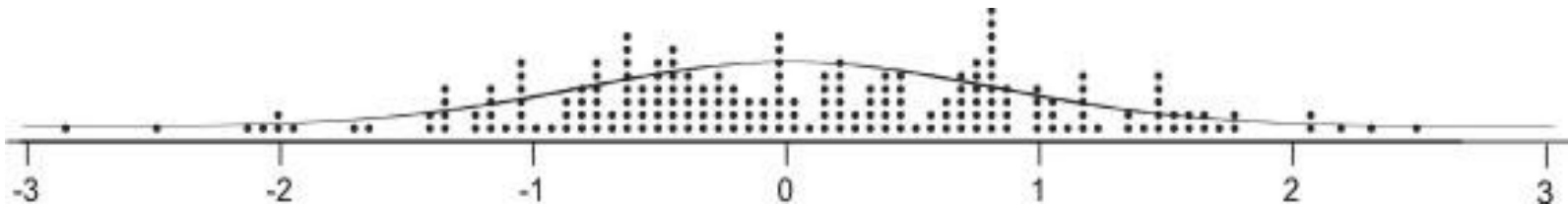
Andere arithmetische Generatoren

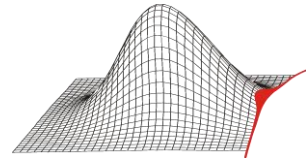
- Mersenne Twister
- Well Equidistributed Long-period Linear
- Blum-Blum-Shub Generator



Simple-Random-Sampling (SRS)

- Realisierungen werden „zufällig“ ermittelt
- „Umwandlung“ der mit dem Zufallsgeneratoren ermittelten Gleichverteilungen in andere Verteilungen mittels:
 - Inversionsmethode
 - Annahme-Ablehnungsmethode
- „Cluster“-Bildungen der Realisierungen ist möglich
- Beispiel: $N(0,1)$:

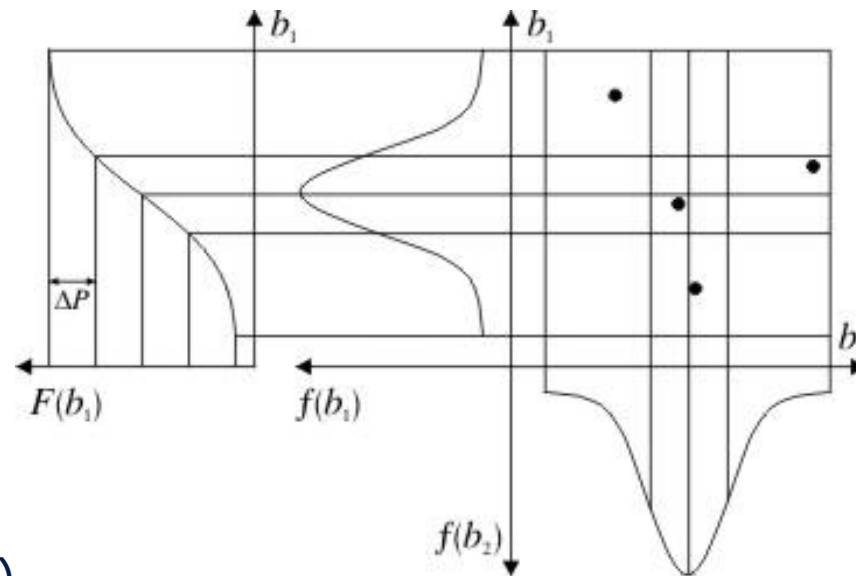




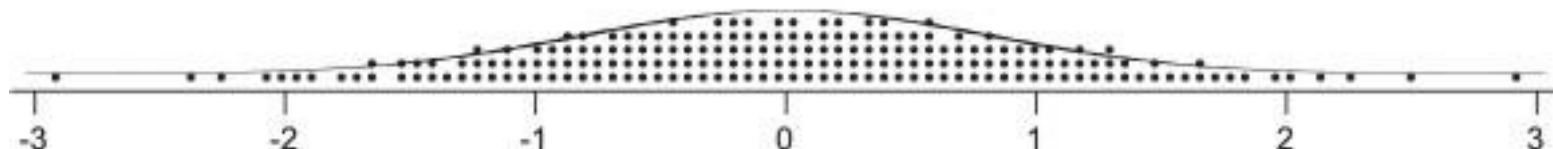
Latin Hypercube Sampling (LHS)

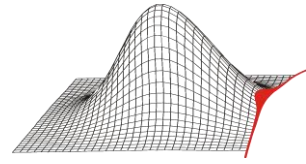
[13]

- Mehr Realisierungen in Bereichen der Verteilungsfunktion, welche höhere Dichten aufweisen -> Reduktion der Varianz
- Algorithmus:



- Beispiel: $N(0,1)$

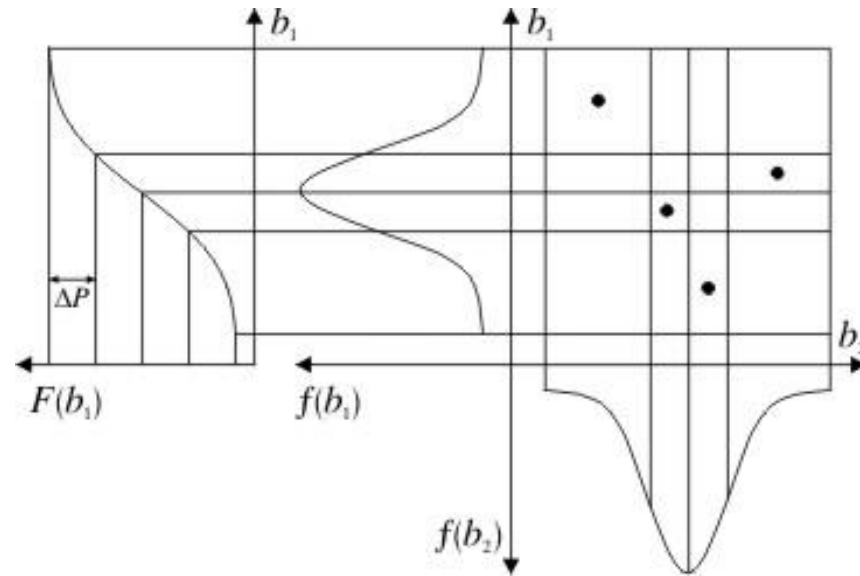




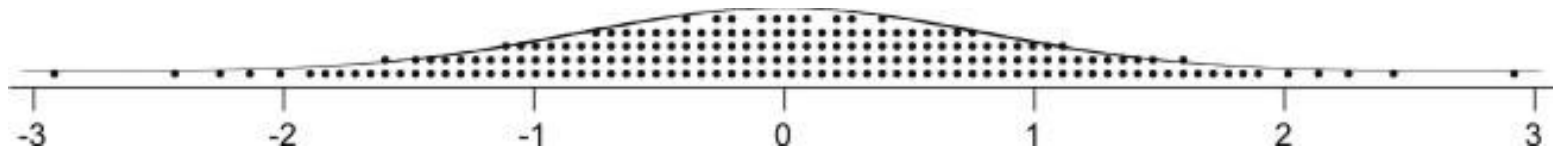
Descriptive Sampling (DS)

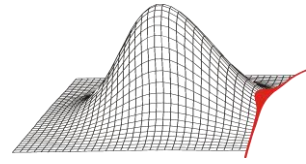
[14]

- Algorithmus:



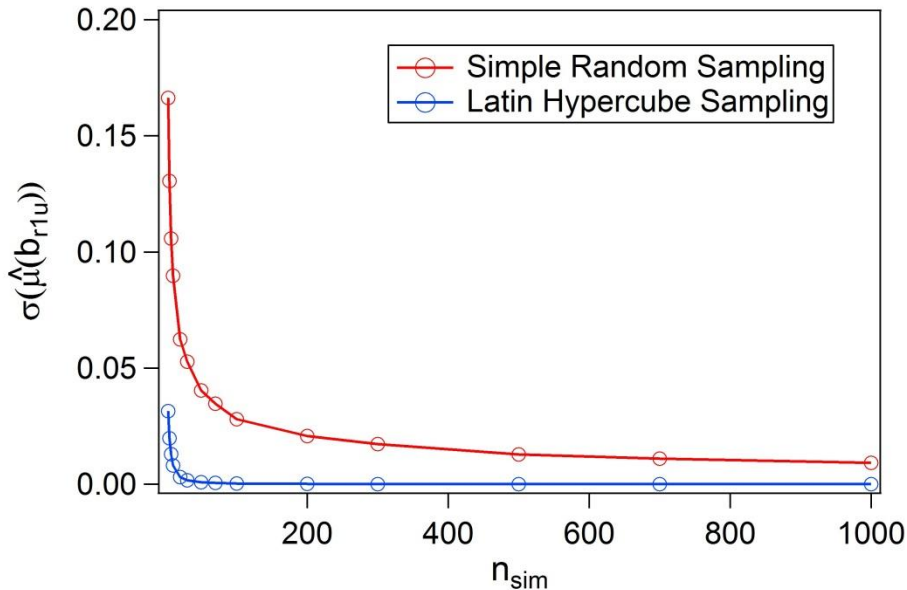
- Beispiel: $N(0,1)$



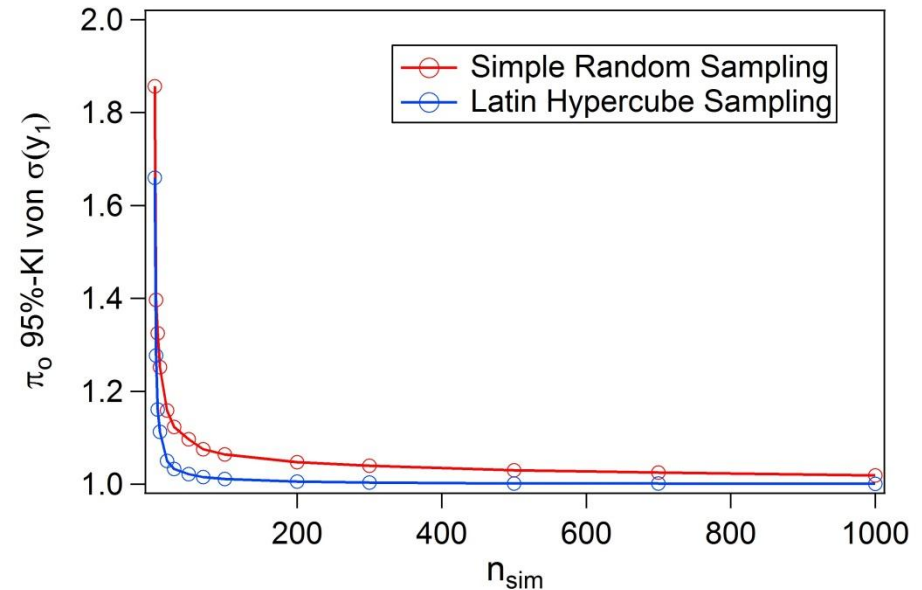


1000 Wiederholungen der Zufallszahlenerstellung

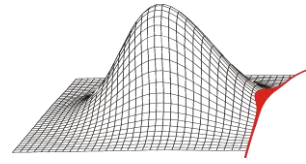
Gleichverteilte Zufallsvariable b_{r1u}
in den Grenzen $[0,1]$



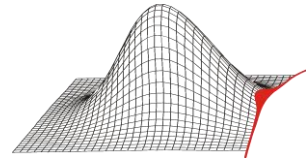
π_o des 95%-Konfidenzintervalls für die
Standardabweichung $\sigma(y_1)$



$$y_1 = \frac{(b_{r1u} + b_{r2u} - 1)}{\sqrt{2/12}}$$



	Vorteile	Nachteile
Simple Random Sampling $n_{sim} \approx \frac{100}{\tilde{P}_f}$	- „unsystematische“ zufällige Erzeugung - schnelles Vorgehen - programmiertechnisch einfach umsetzbar	- Clusterbildung - Hohe stat. Unsicherheiten bei wenigen Realisierungen
Latin Hypercube Sampling $n_{sim} \approx \frac{10}{\tilde{P}_f}$	- „systematische“ Erzeugung der Zufallszahlen - Reduktion der Varianz	- „unnatürliche“ Zufallszahlen



Restricted Pairing:

- Erzeugung der Korrelationsstrukturen zwischen den Eingangsgrößen
- Ausgangspunkt ist eine Zielkorrelationsmatrix (symmetrisch positiv semidefinite Matrix)
- Iterative Methode mit geeignetem Abbruchkriterium

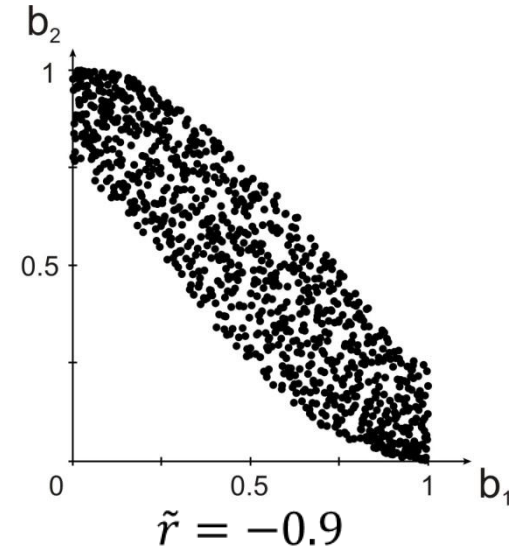
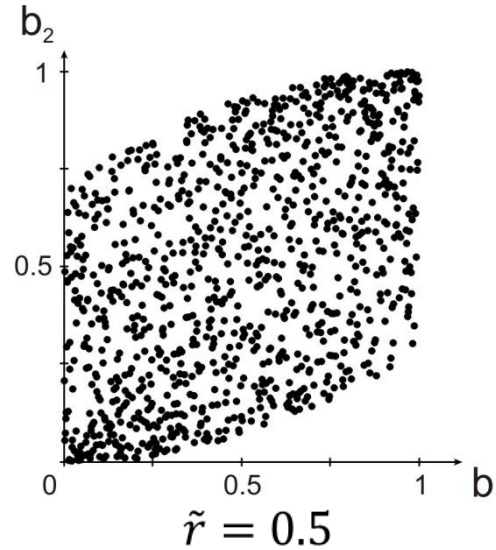
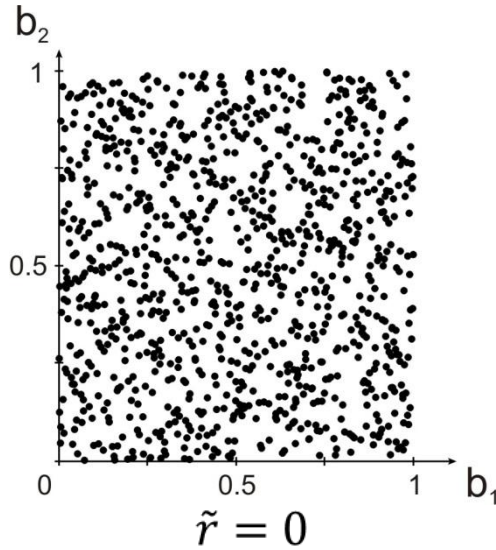
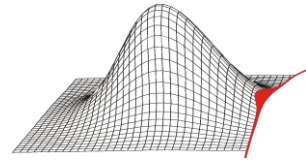
Einfluss der Korrelation der Eingangsgrößen:

- Testfunktion:

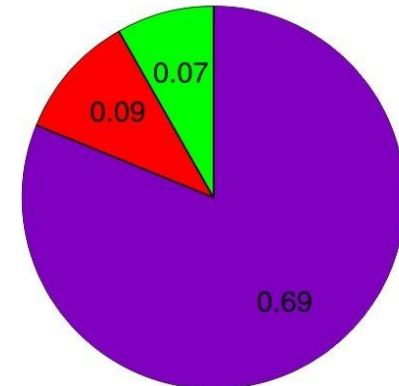
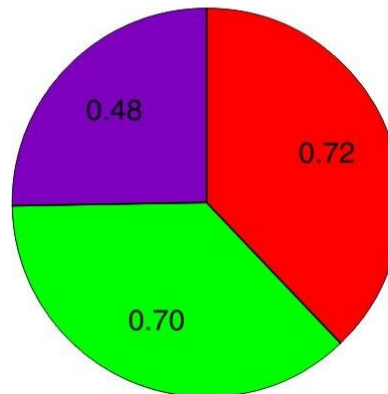
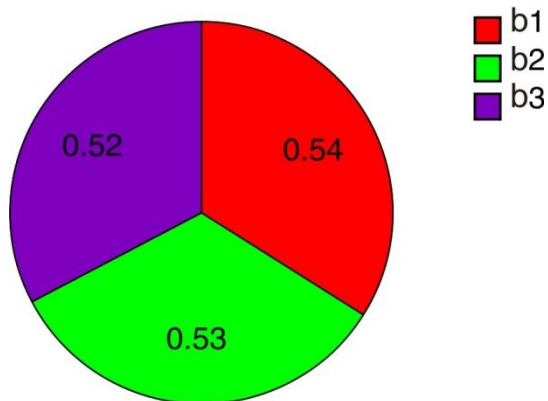
$$y_1 = b_{r1} \cdot b_{r2} \cdot b_{r3}$$

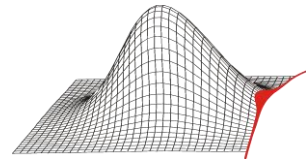
b_{r1}, b_{r2}, b_{r3} – gleichverteilt in den Grenzen $[0,1]$

- Stichprobe mit 1000 Realisierungen
- Aufprägen von Korrelationen zwischen b_{r1} und b_{r2}

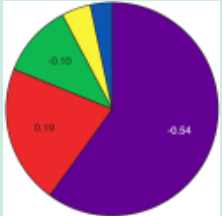
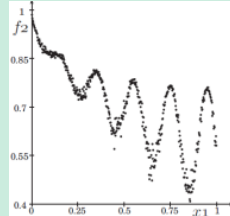
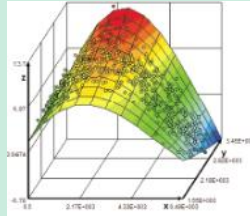
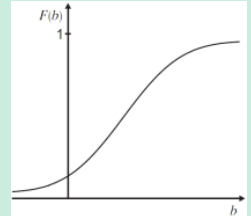


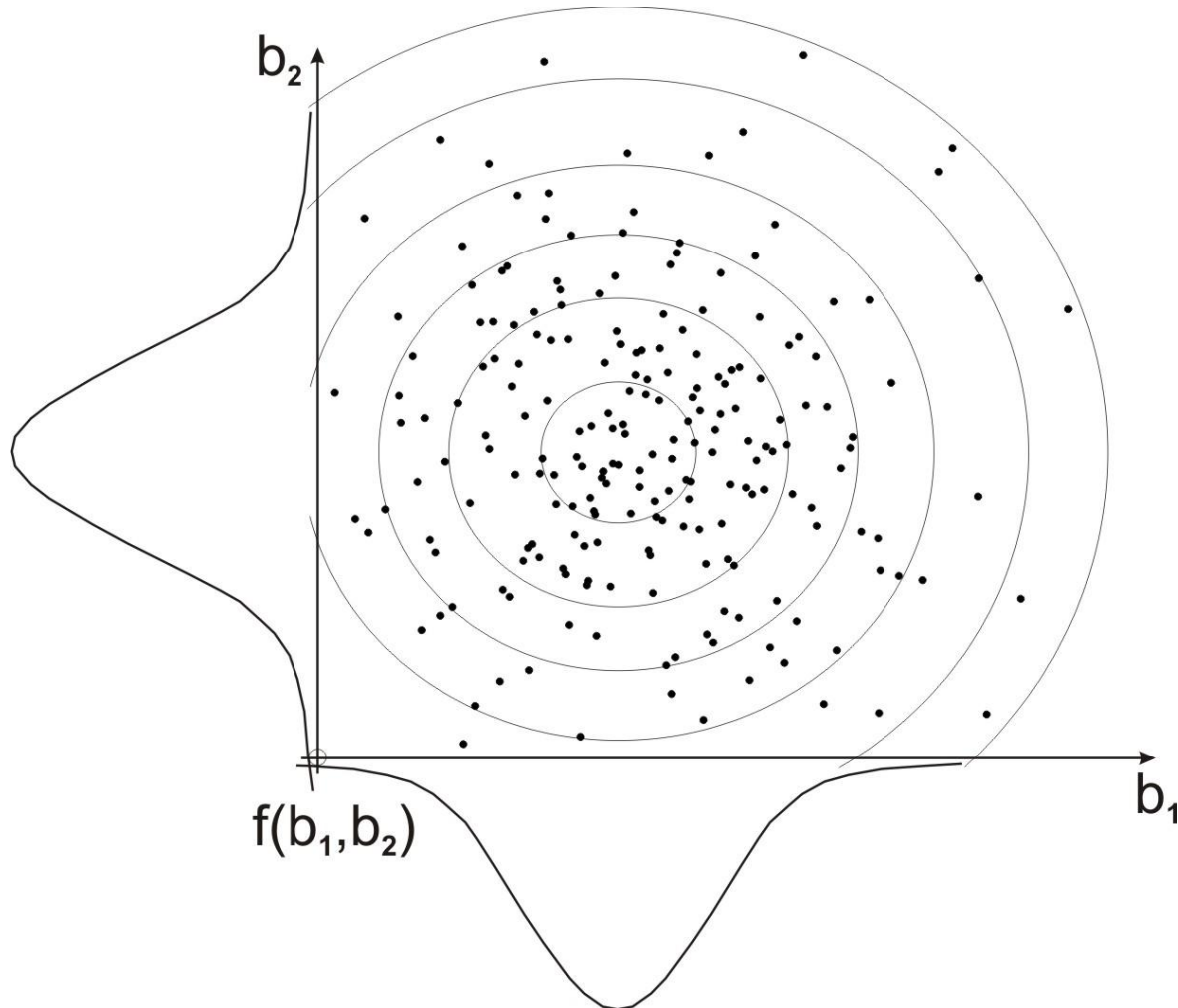
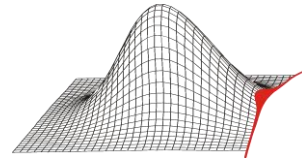
Target-Variable: y_1

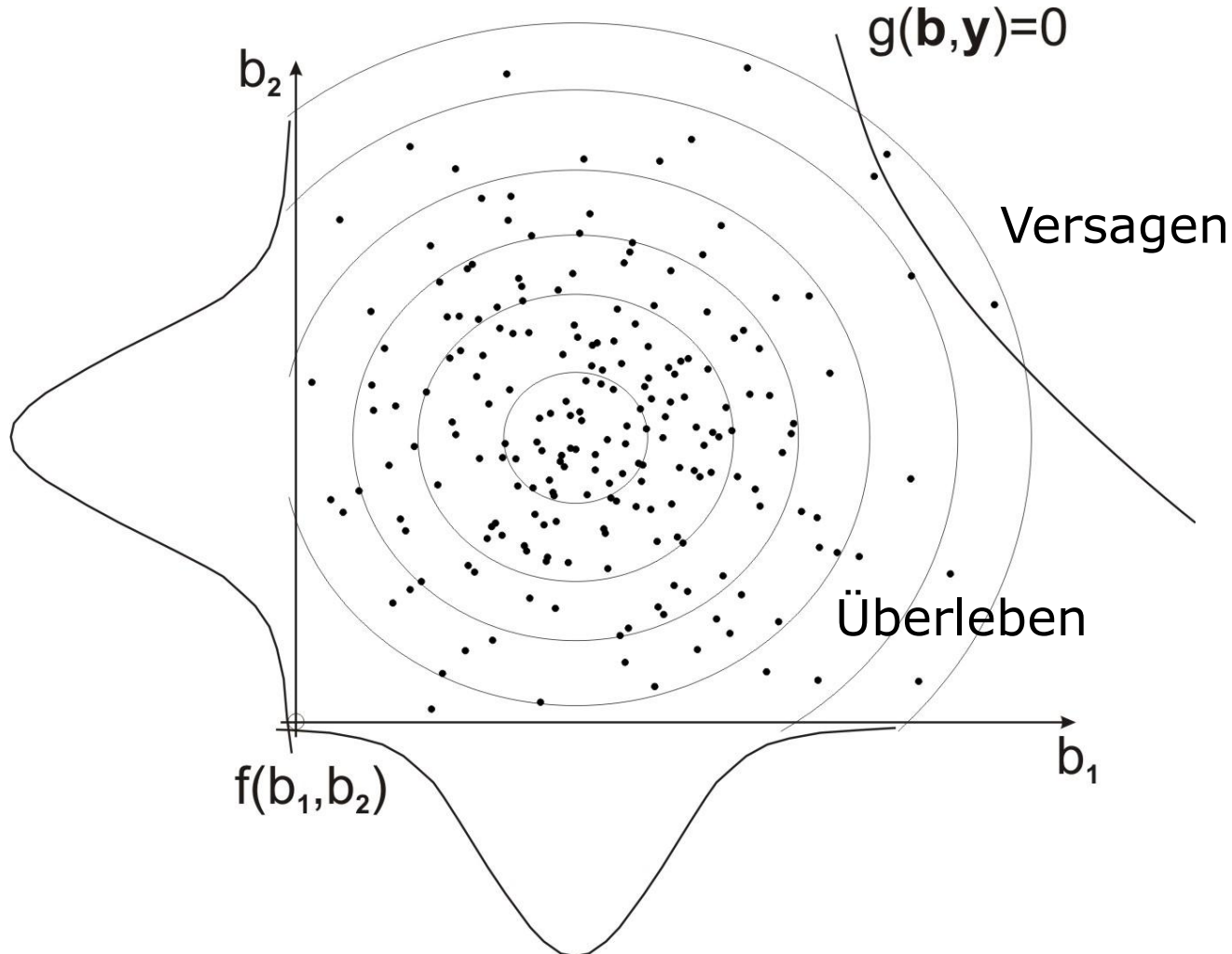
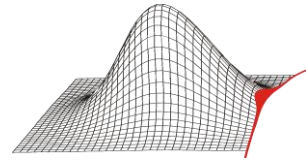


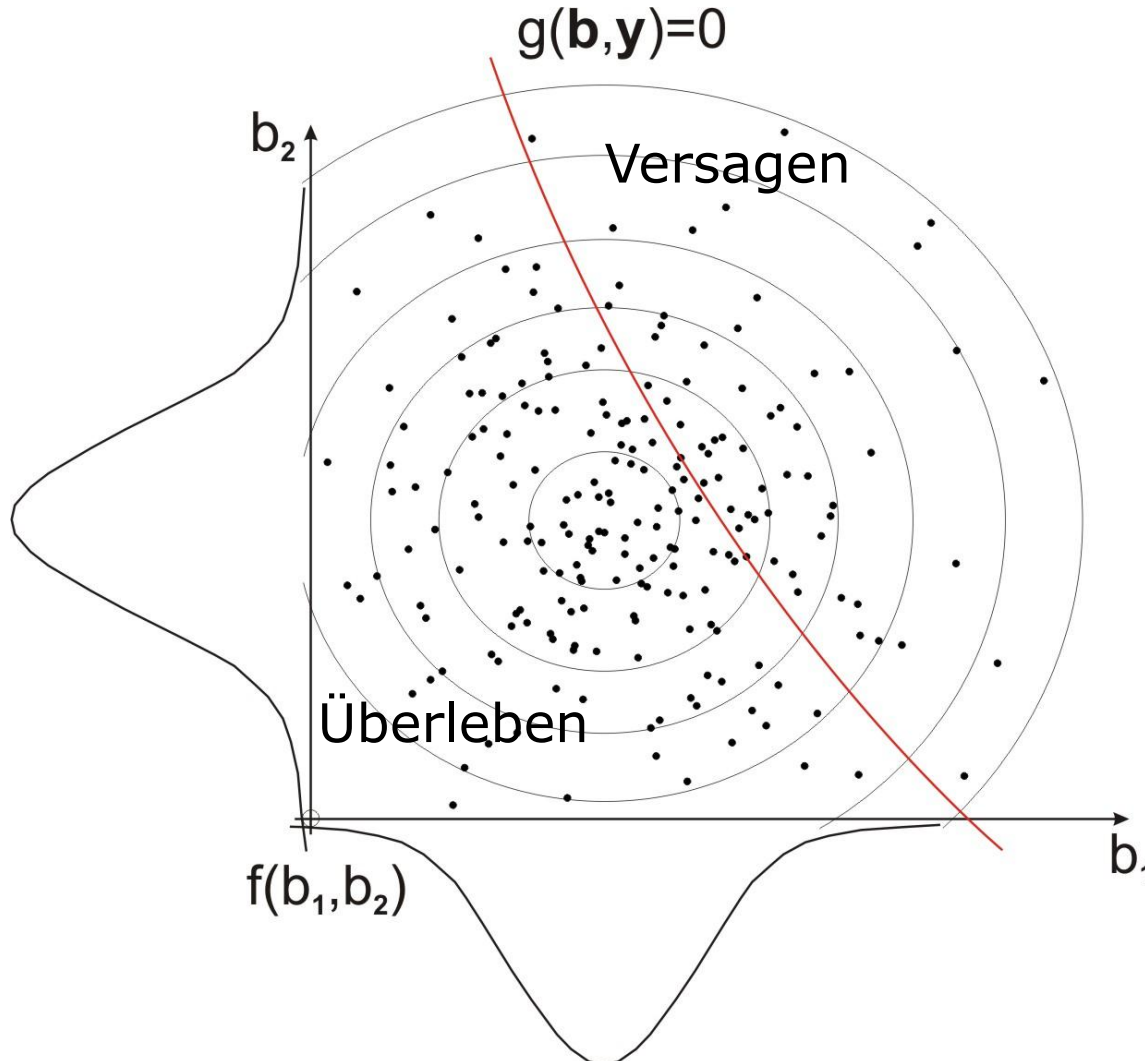
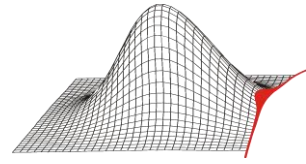


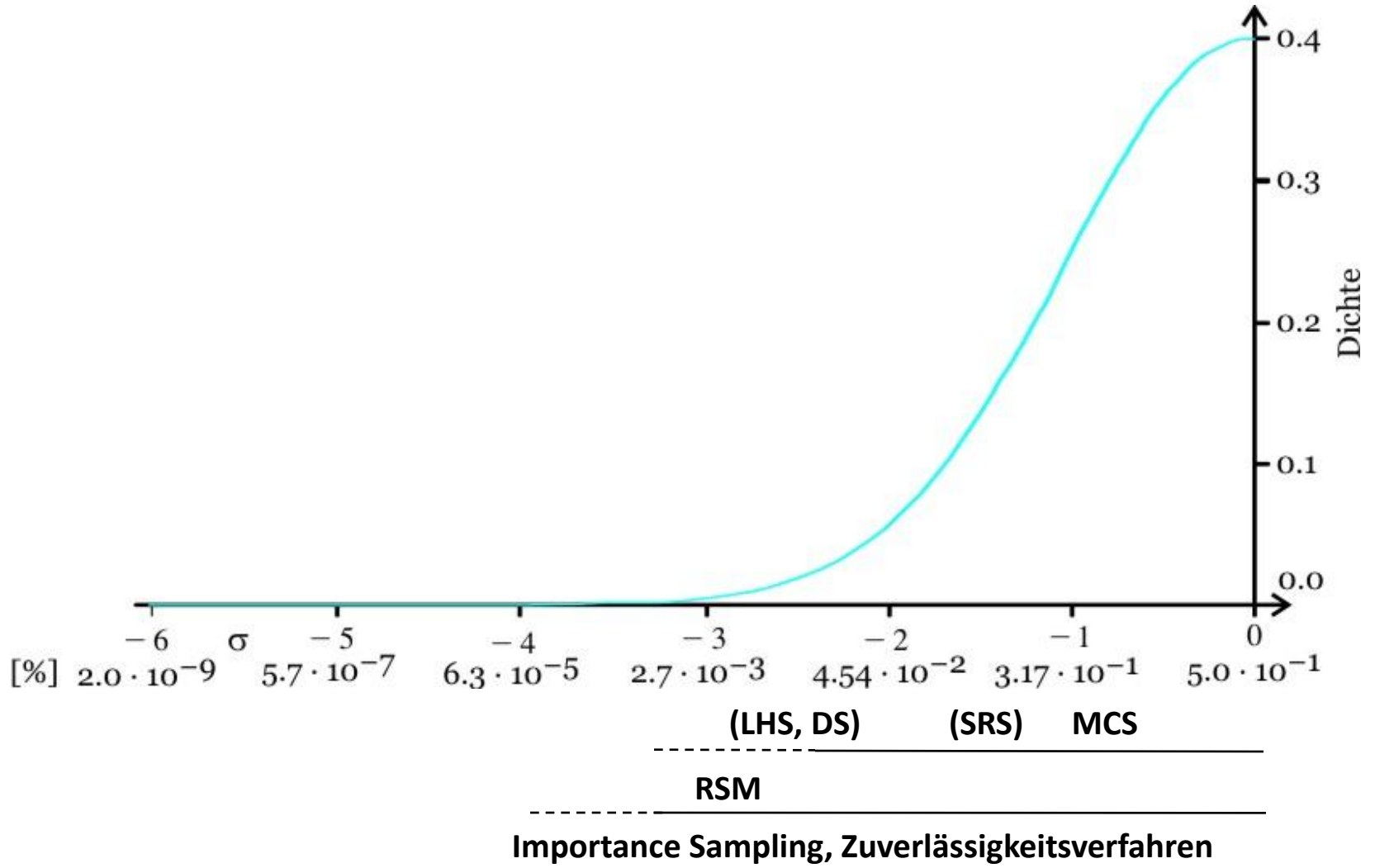
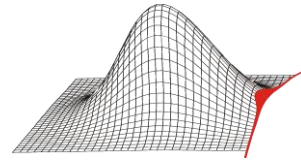
Anwendung der Monte-Carlo Methoden für probabilistische Untersuchungen unter Verwendung eines optimierten Latin-Hypercube-Samplings und korrelierter Eingangsgrößen

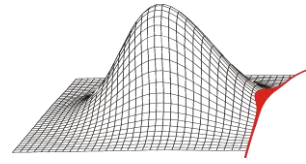
Ergebnisse der prob. Simulation	Sensitivitäten	Robustheit	Optimierung	Ausfall-wahrscheinlichkeit
Dichtefunktion der Eingangsgrößen - geschätzt (Industriestandard)				
- genau bekannt				
Benötigte Anzahl an det. Rechnungen	- nahezu unabhängig von Anzahl der Eingangsgrößen - typisch: $n_{sim} = 50...100$ - minimal: $n_{sim} = \text{no. Eingangsgrößen} + 10...20$ - bessere Konfidenzintervalle mit höherer Anzahl n_{sim}			$P_f \approx \frac{10}{n_{sim}}$
Ergebnisse Eine einzige MCS liefert für alle Ergebnisgrößen:				











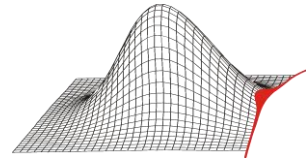
Vorteile*

- Genauigkeit der Ergebnisgrößen nahezu unabhängig von Anzahl der Eingangsgrößen
- Betrachtung aller Ergebnisgrößen innerhalb einer MCS
- Arbeiten mit deterministischen „blackbox“ Modellen möglich

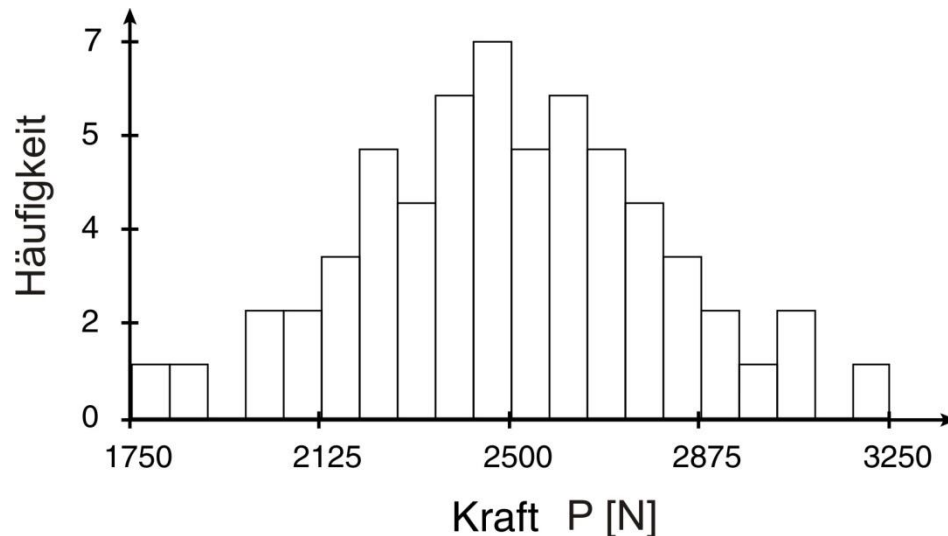
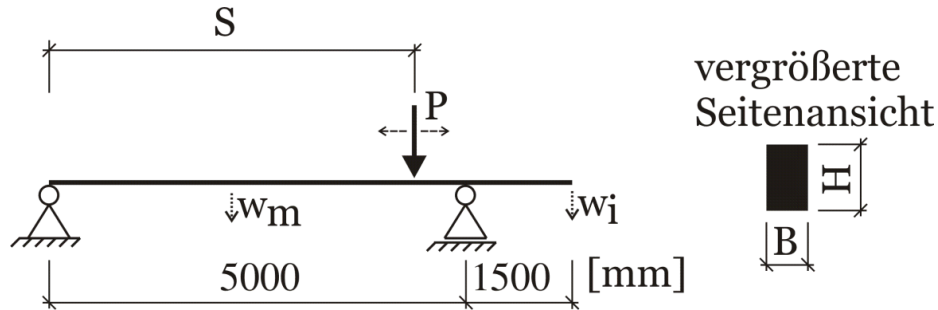
Nachteile*

- Abhängigkeit der Güte der stat. Maße von der Anzahl der Realisierungen n_{sim}

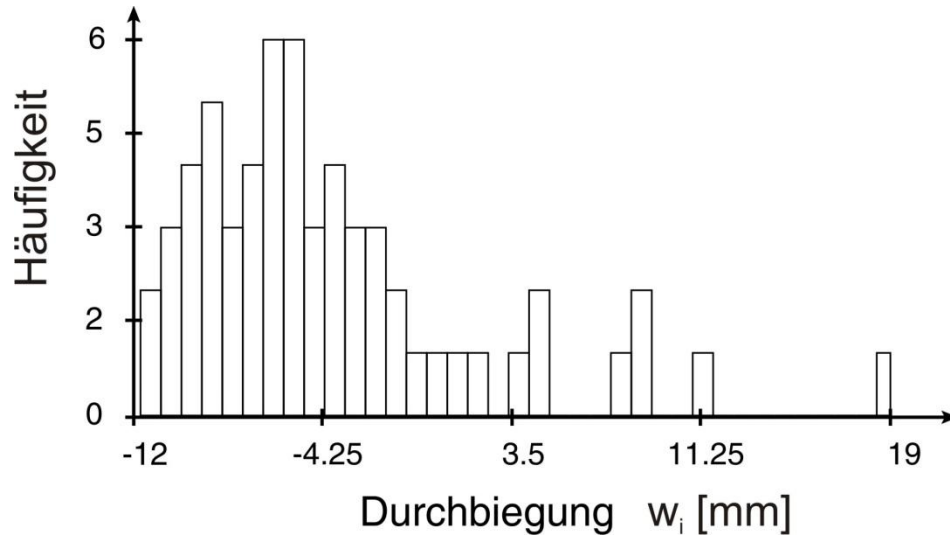
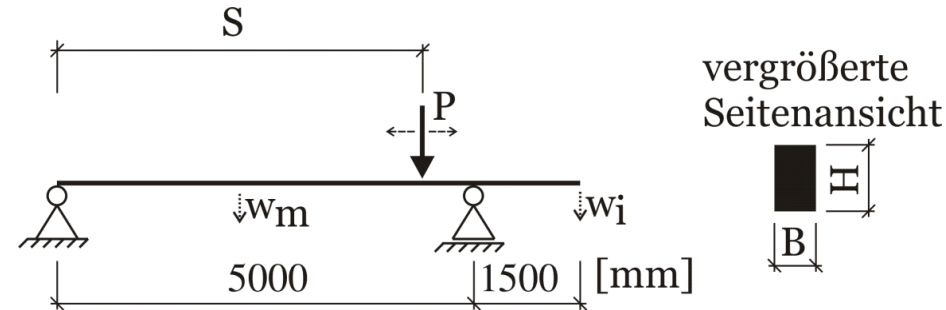
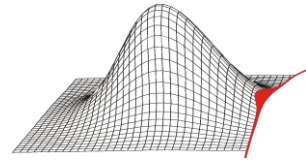
* gegenüber anderen probabilistischen Methoden



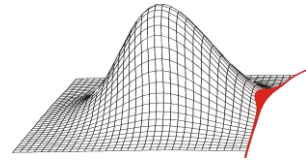
Durchführung einer MCS mit 60 Realisierungen; LHS



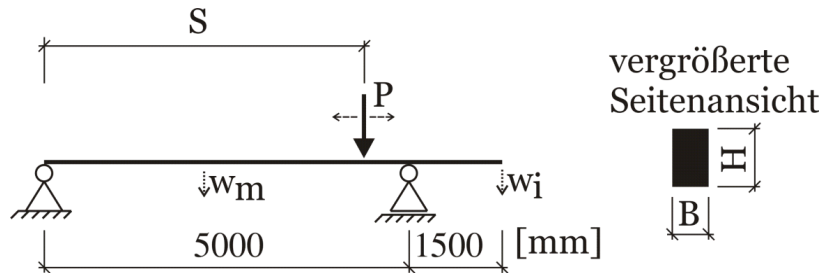
Maß	Wert
Minimaler Wert	1753.868
Maximaler Wert	3246.120
Mittelwert	2501.571
Standardabweichung	299.9615
Variationskoeffizient	0.1199
Schiefte	0.006026
Exzess	-0.104016



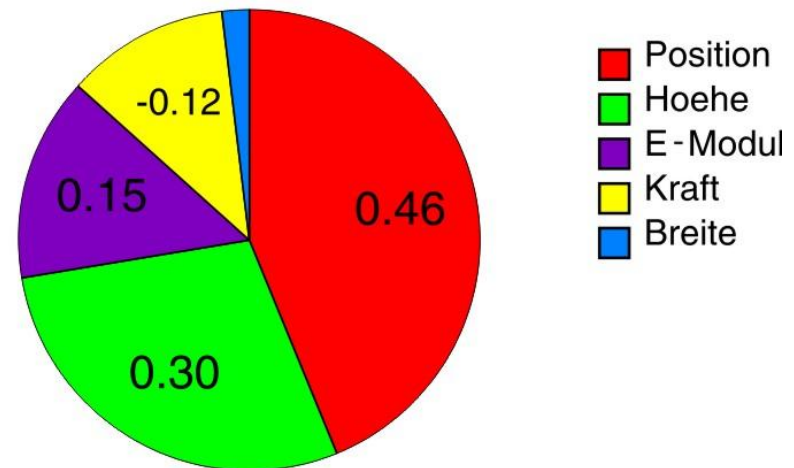
Maß	Wert
Minimaler Wert	-11.721
Maximaler Wert	18.773
Mittelwert	-3.887
Standardabweichung	5.9961
Variationskoeffizient	-1.5423
Schiefte	1.490104
Exzess	2.407719

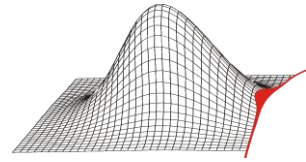


Bewertung anhand des Rangkorrelationskoeffizienten $\tilde{r}$

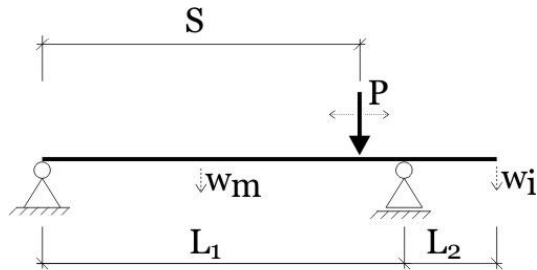


Target-Variable : Durchbiegung w_i

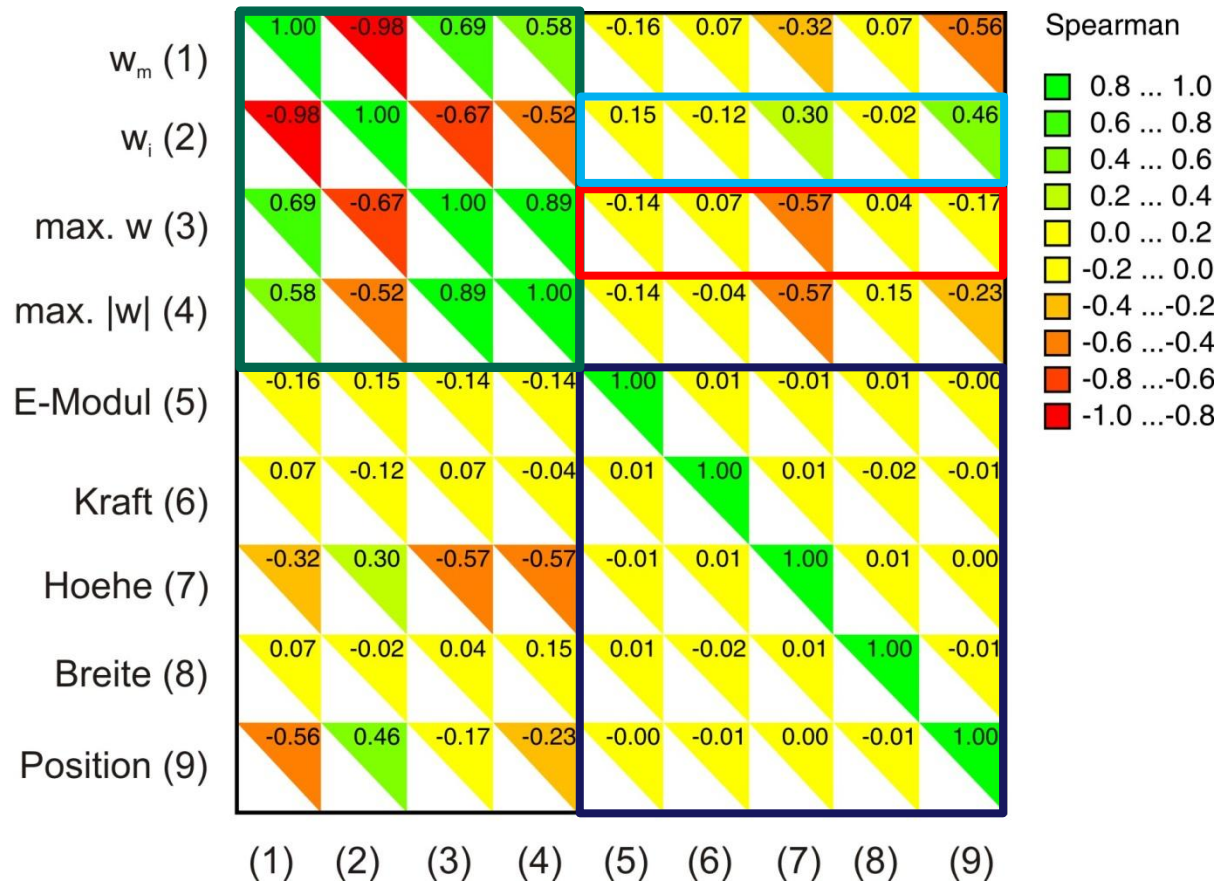
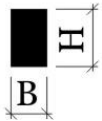


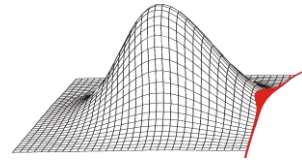


Bewertung anhand des Rangkorrelationskoeffizienten $\tilde{r}$

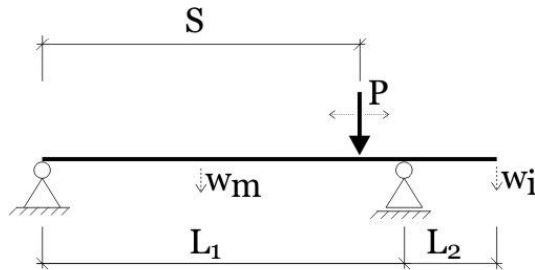


vergrößerte
Seitenansicht

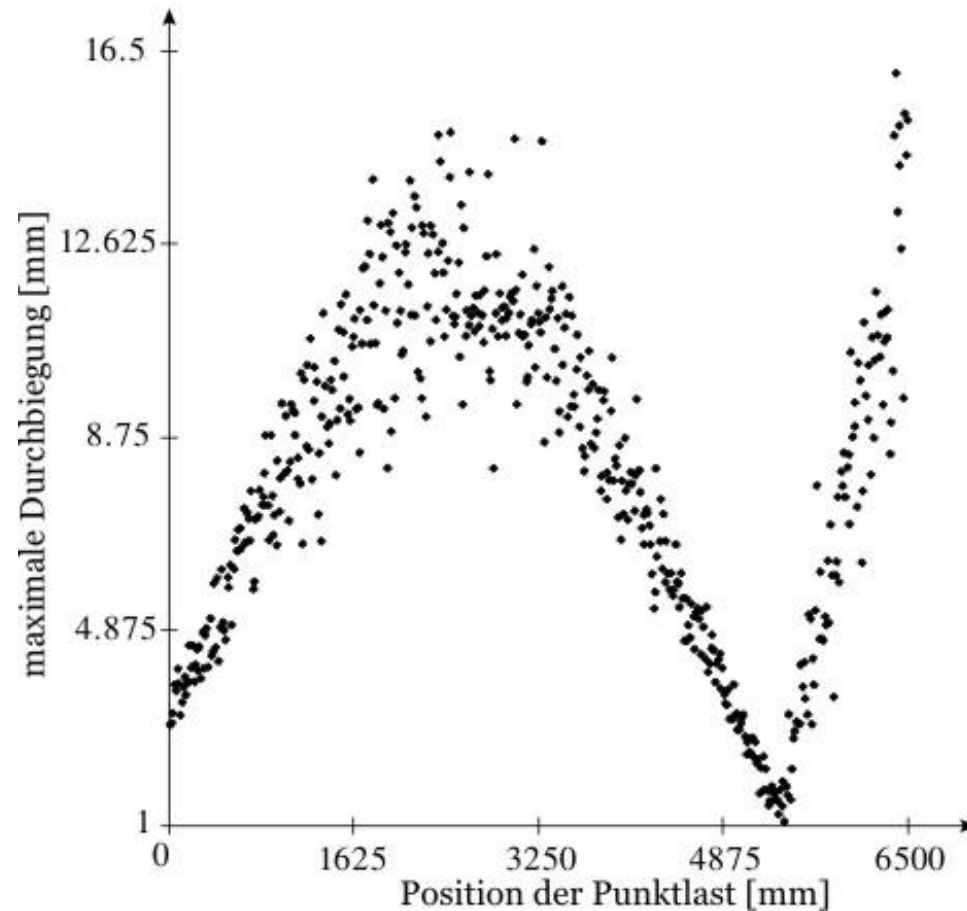
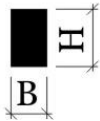


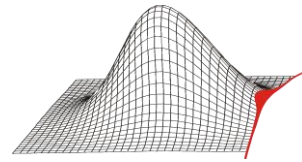


Bewertung anhand des nichtlinearen Korrelationsmaßes

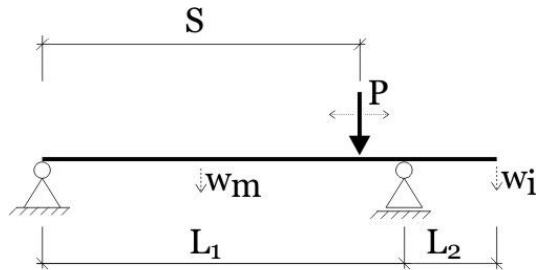


vergrößerte
Seitenansicht

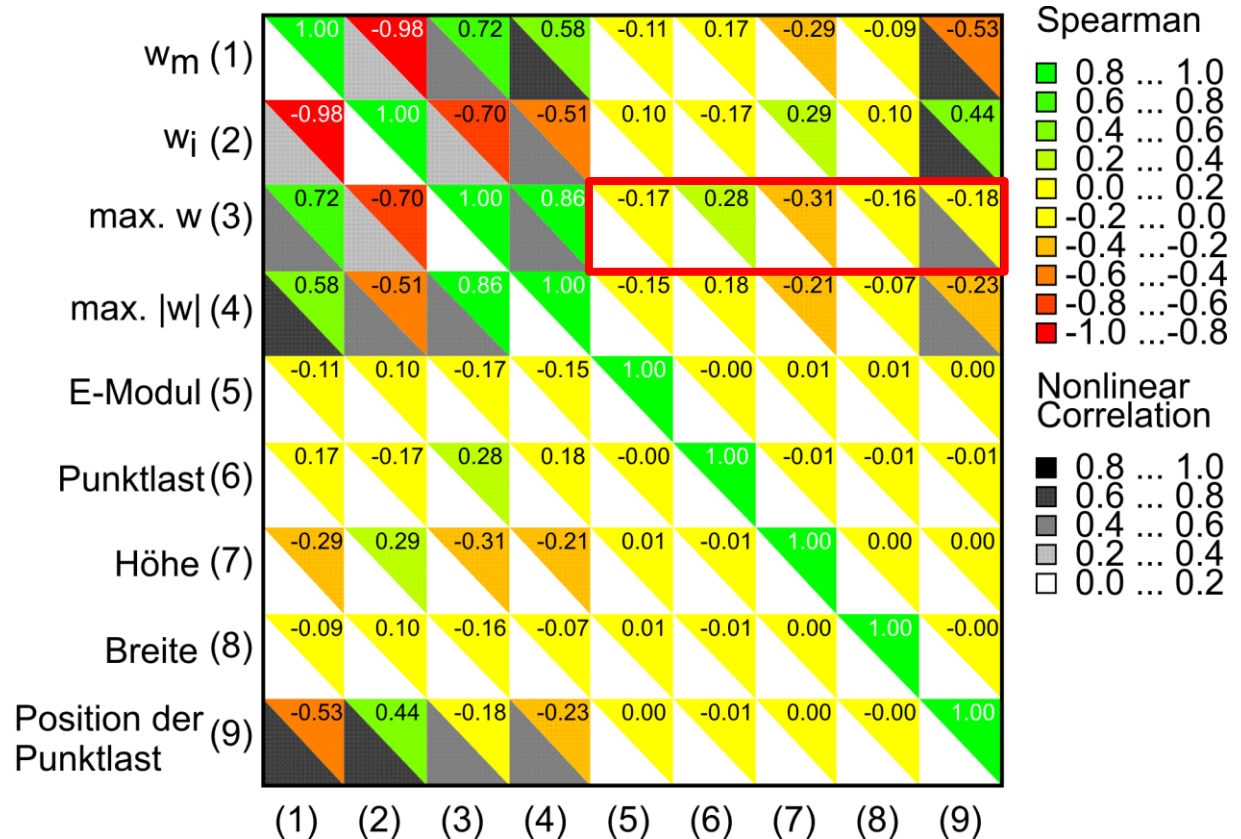
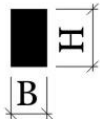


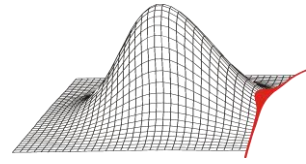


Bewertung anhand des nichtlinearen Korrelationsmaßes

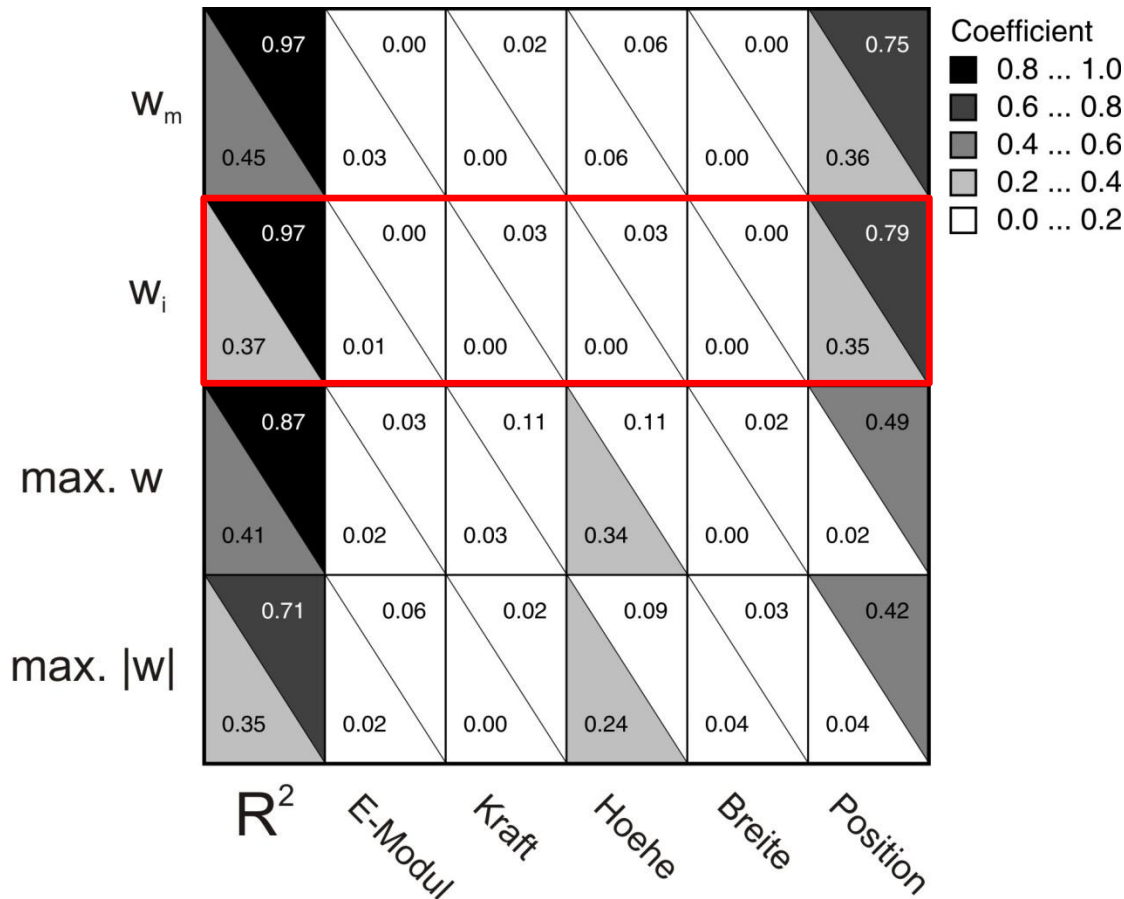


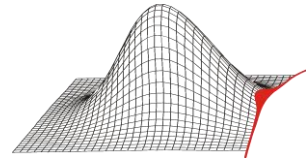
vergrößerte
Seitenansicht





Bewertung anhand des Coefficient of Importance (CoI)





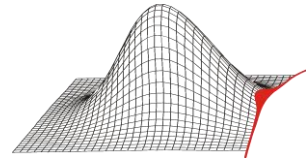
Was ist robustes Design?

Ingenieurmäßige Maße	Statistische Maße
- Überschreiten von Grenzwerten - Auftreten von unerwünschten plötzlichen Änderungen der Ergebnisgrößen (z.B. lokales Maximum der Ergebnisgröße) - Ansprechen von Systeminstabilitäten (z.B.: Beulen)	- Lage der Mittelwerte der Ergebnisgrößen - Größe der Variationskoeffizienten der Ergebnisgrößen

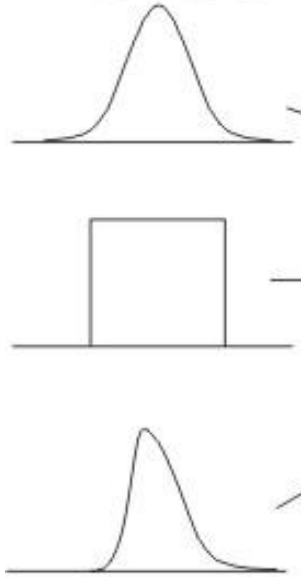
[9]

Notwendige Anzahl an Rechnung bei MCS:

- Abhängig von der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
- Lage der Mittelwerte der Ergebnisgrößen: $\approx 30 \dots 50$
- Größe der Variationskoeffizienten der Ergebnisgrößen: $\approx 50 \dots 100$

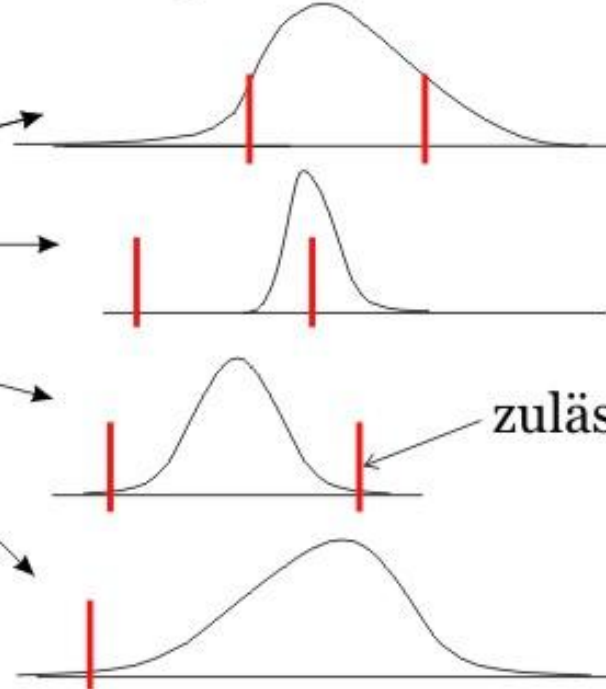


Eingangsgrößen

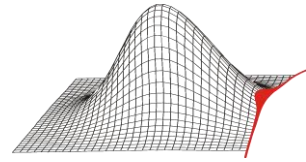


determinis-
tisches
Modell

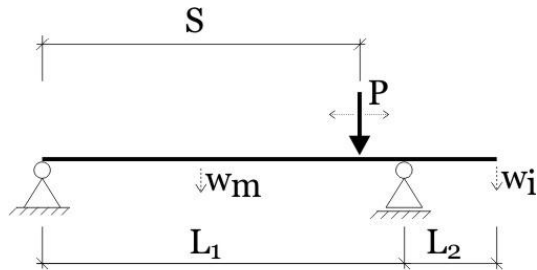
Ergebnisgrößen



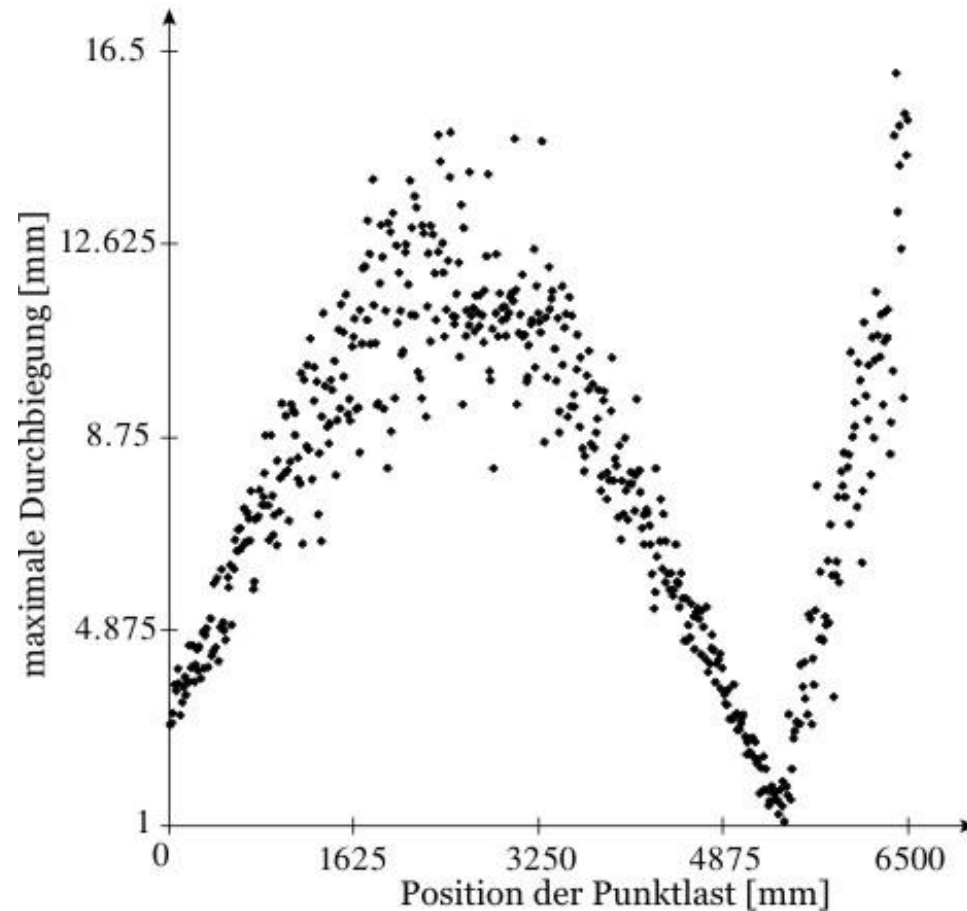
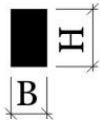
zulässige Streubreite

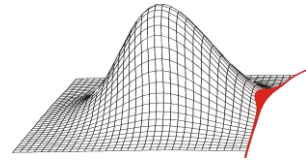


Verzweigungssysteme

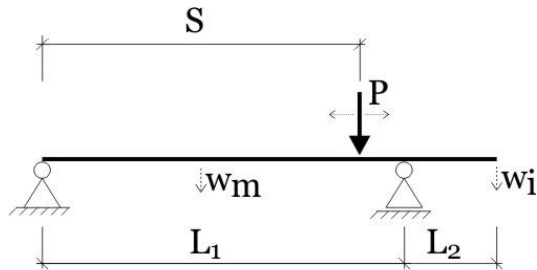


vergrößerte
Seitenansicht

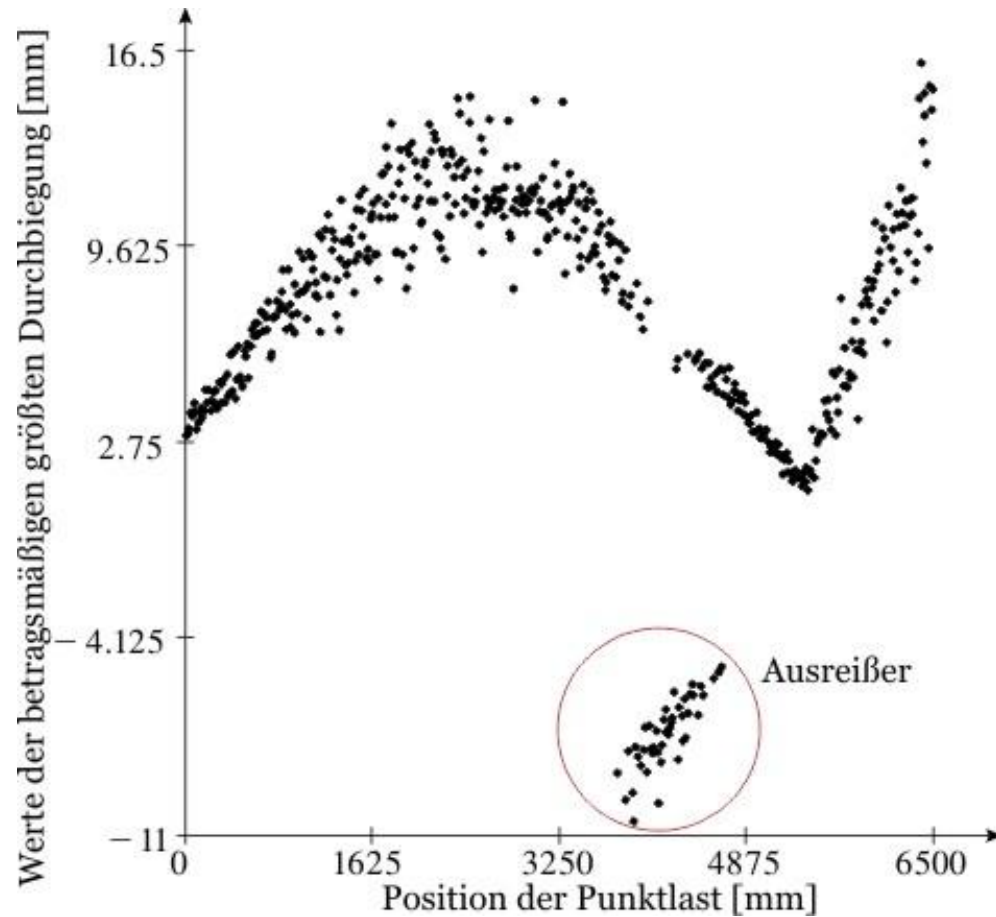
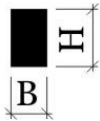


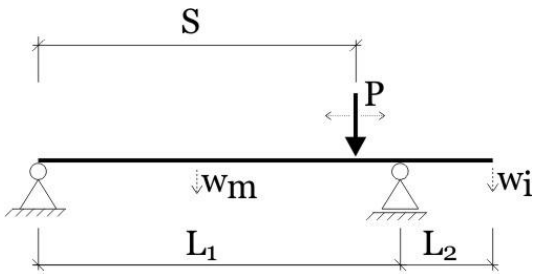
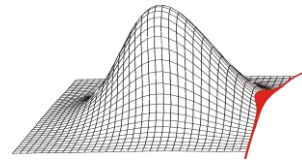


Verzweigungssysteme mit Ausreißern

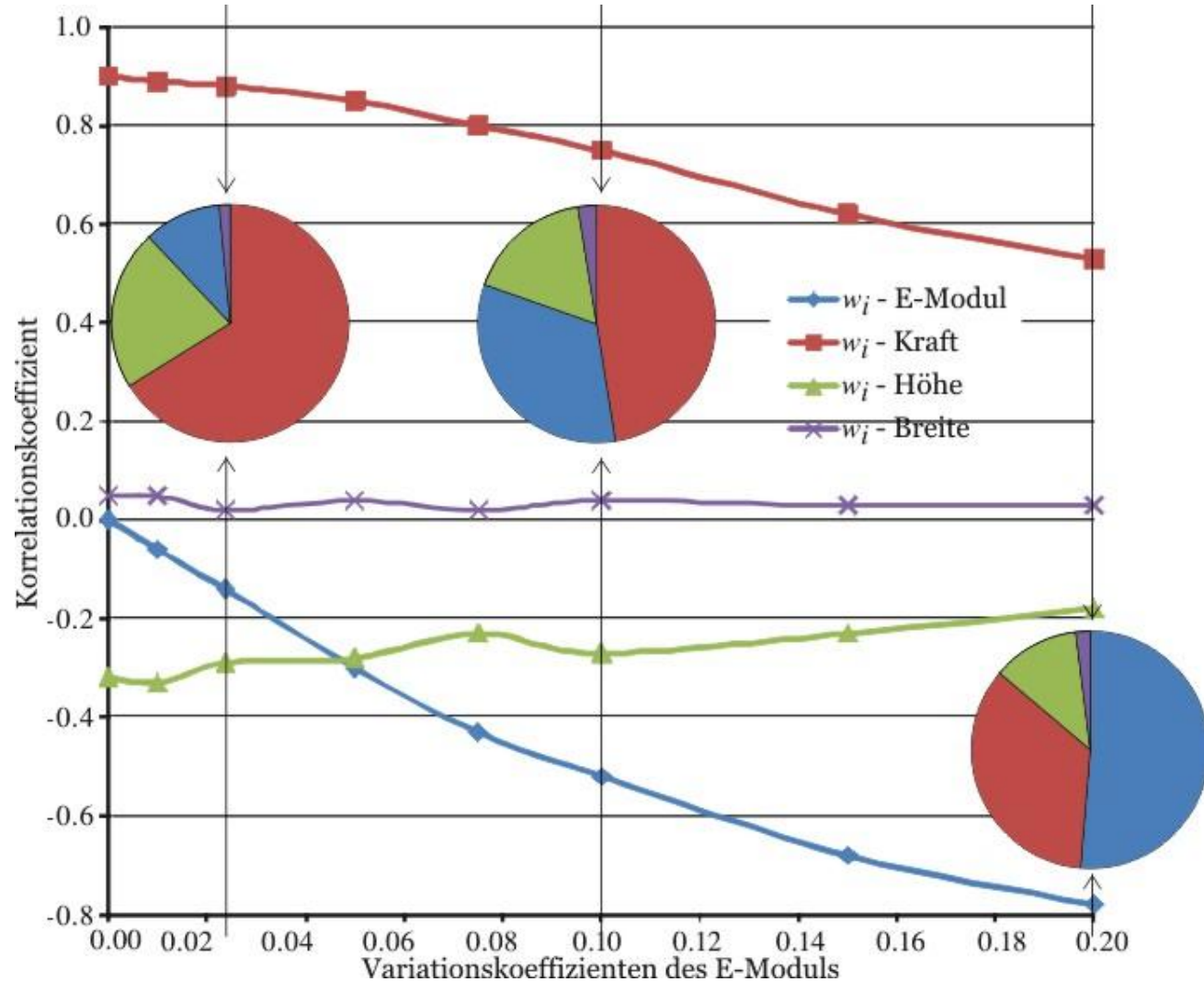
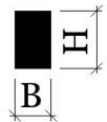


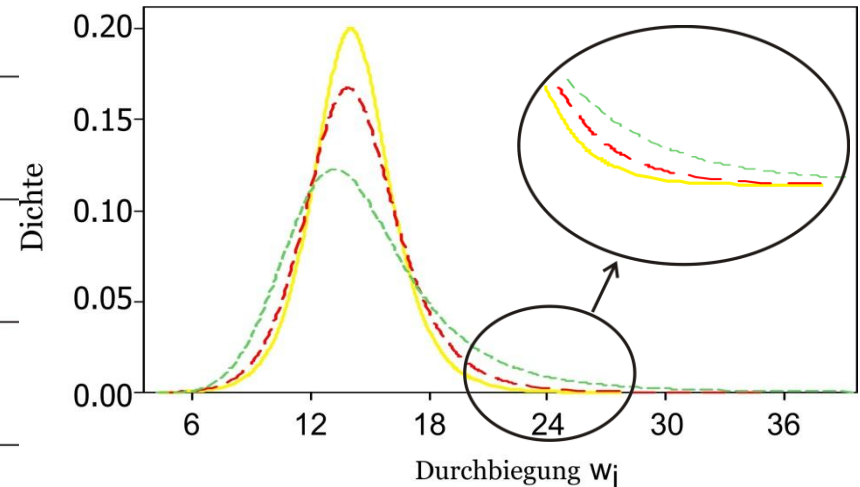
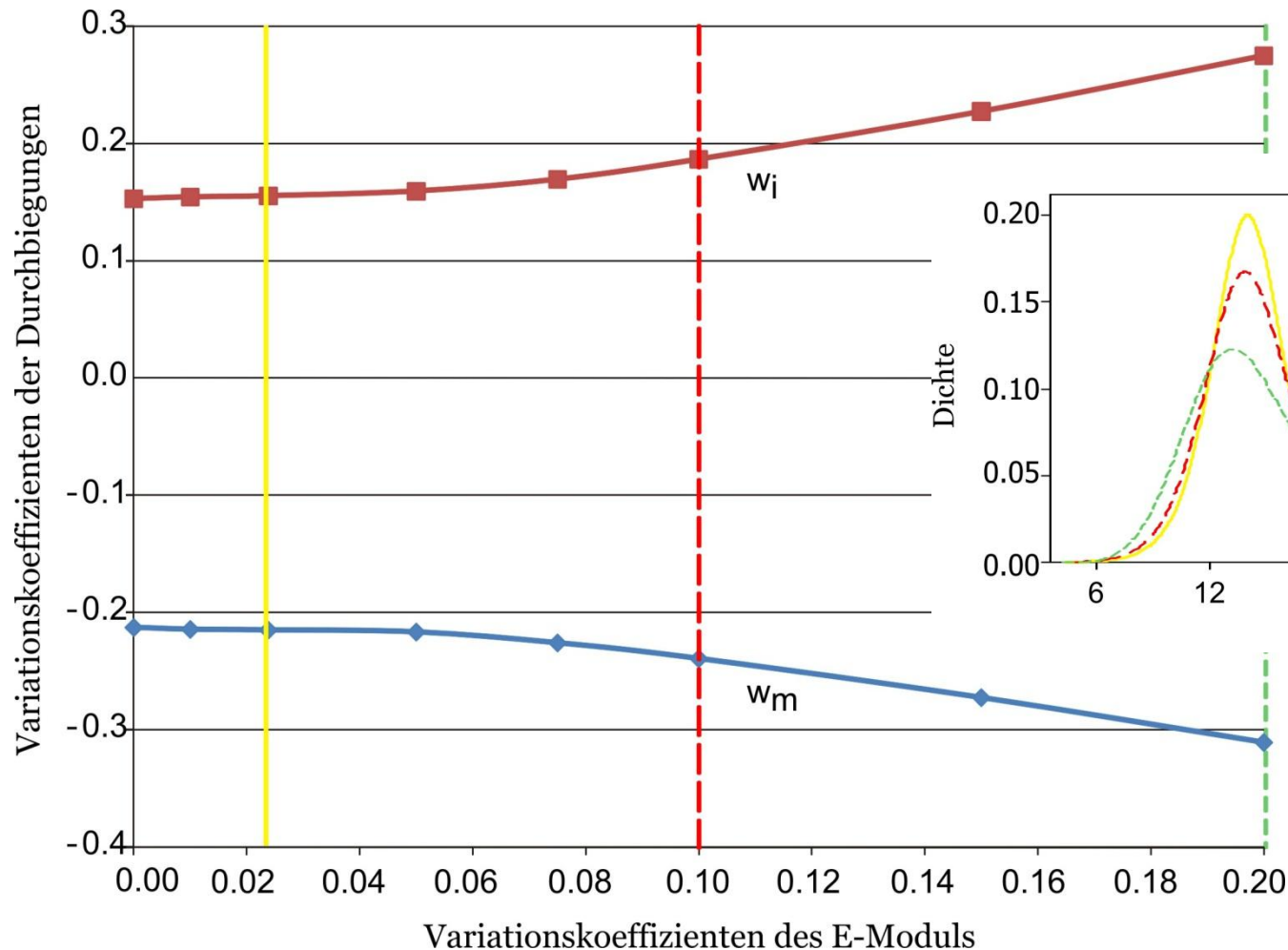
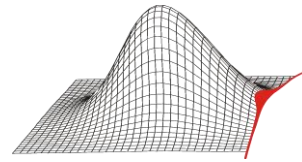
vergrößerte
Seitenansicht

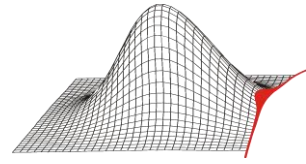




vergrößerte
Seitenansicht







Monte Carlo Simulation

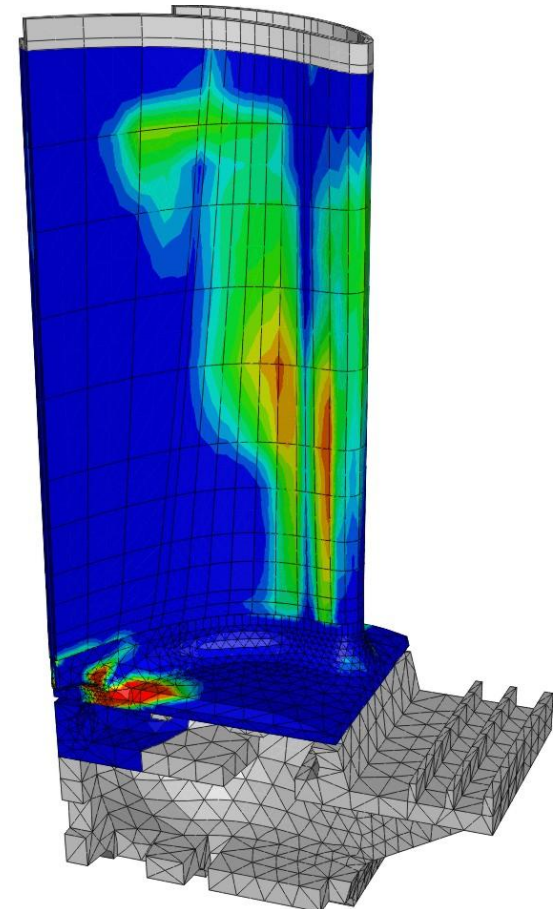
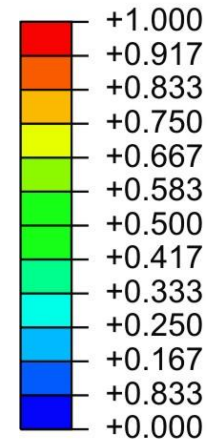
Auslesen der Ergebnisgröße an allen Knoten
des FE-Modells für jede deterministische
Rechnung innerhalb der MCS

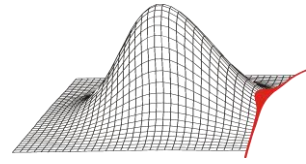
Statistische Auswertung aller Werte

Zusammenführen der statistischen
Ergebnisse

Graphische Auswertung im
3D-Viewer

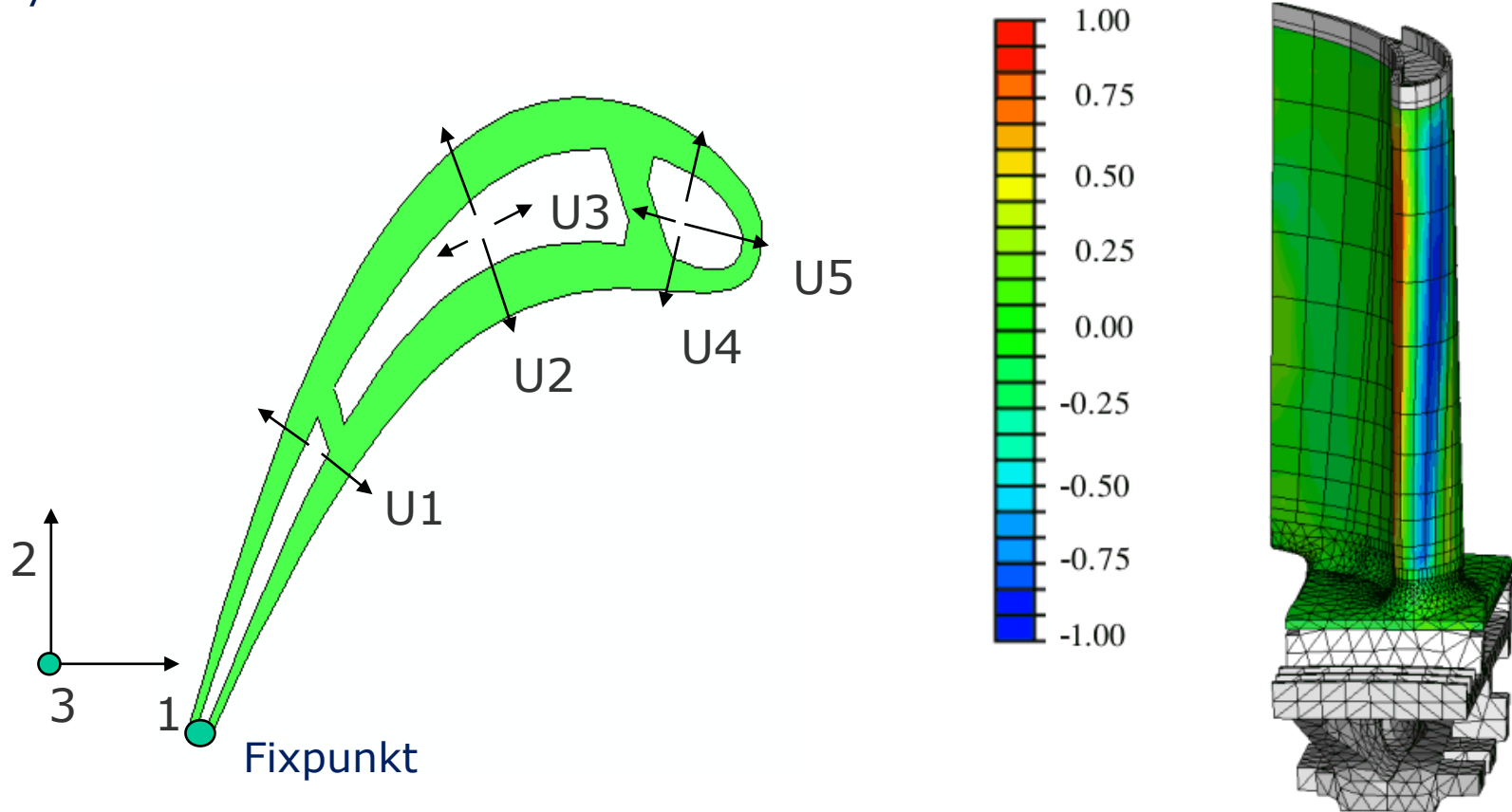
Farbkontur: Relative Häufigkeit
einer speziellen Zyklenzahl

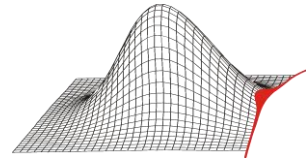




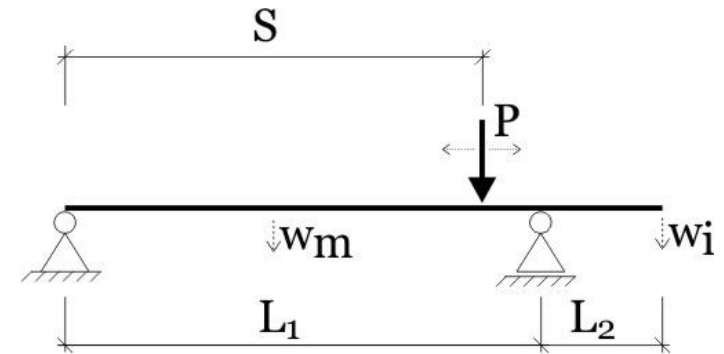
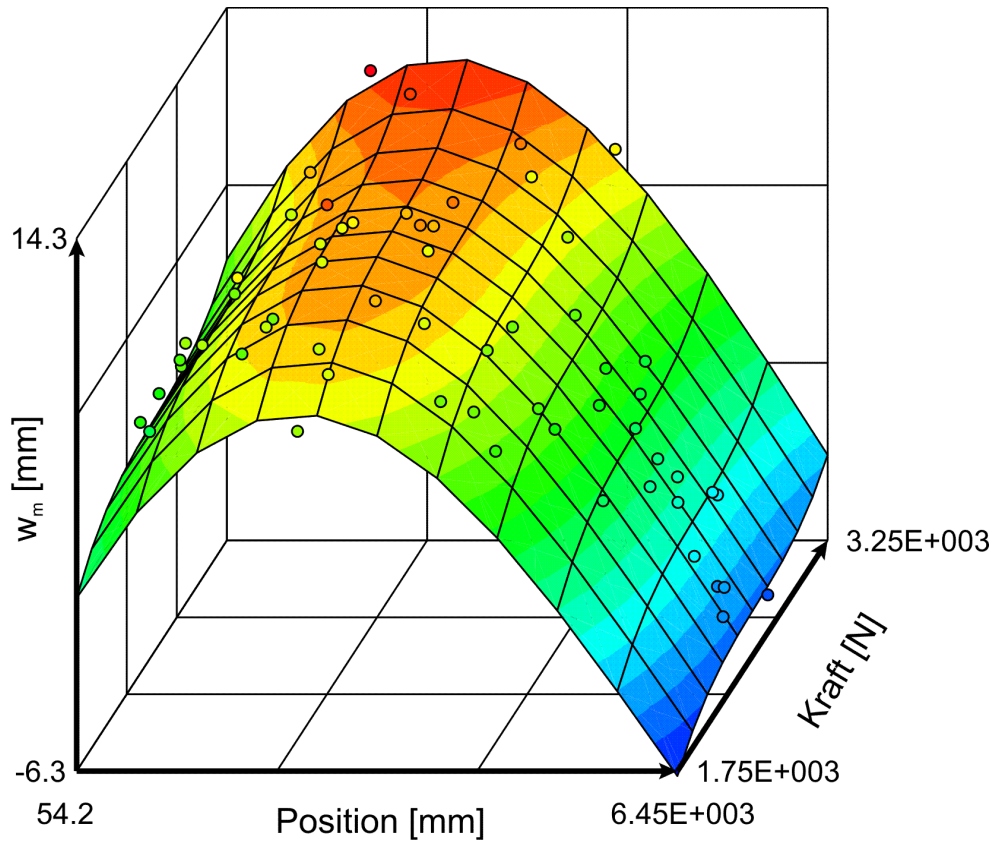
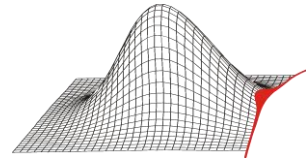
Statistics on Structure (SoS)

Farbkontur: Rangkorrelation zwischen der Kernverschiebung U4 und der Zyklenzahl

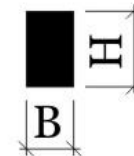


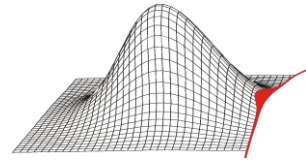


- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- Samplingmethoden
- Regressionen
- Zusammenfassung



vergrößerte
Seitenansicht





- Antwortflächen sind mathematische Modelle (z.B. Polynome) zur Beschreibung des Systemverhaltens.
- Oftmals auch Metamodell oder Response Surface genannt.

Beispiel: Antwortfläche 2. Ordnung (Polynom 2. Ordnung)

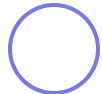
$$\tilde{y}_i = c_0 + c_1 \cdot b_{1,i} + c_2 \cdot b_{2,i} + c_3 \cdot b_{1,i}^2 + c_4 \cdot b_{2,i}^2$$



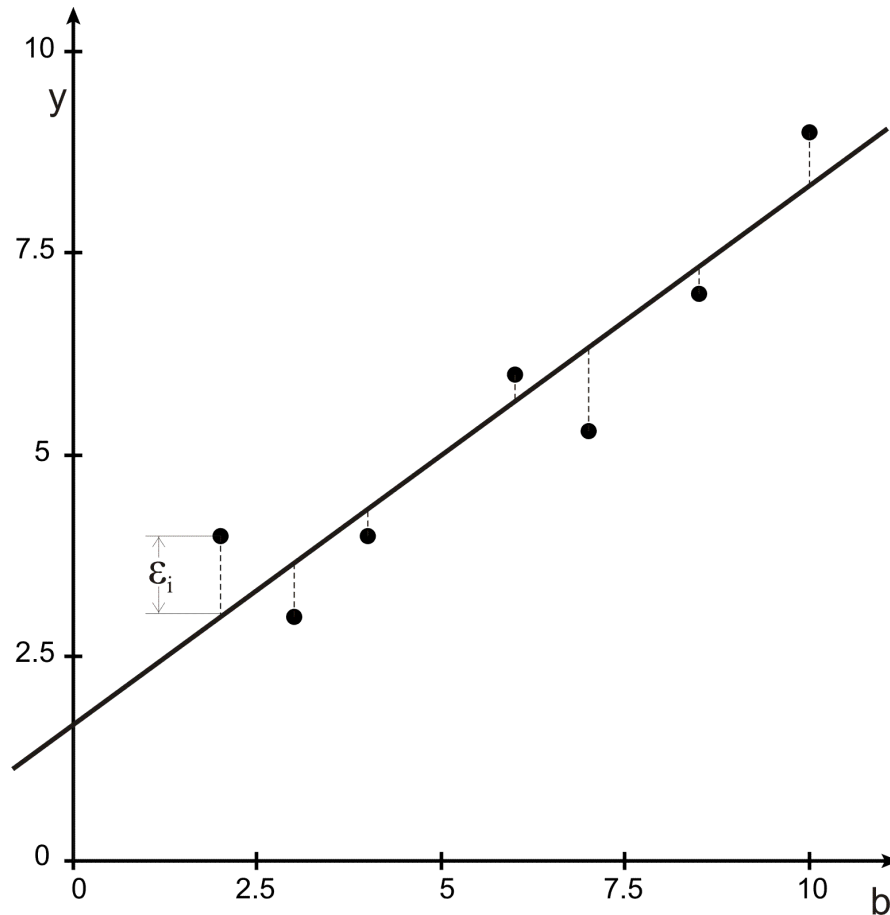
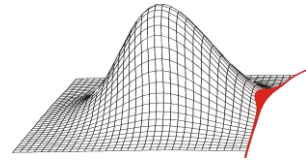
Ergebnisgröße



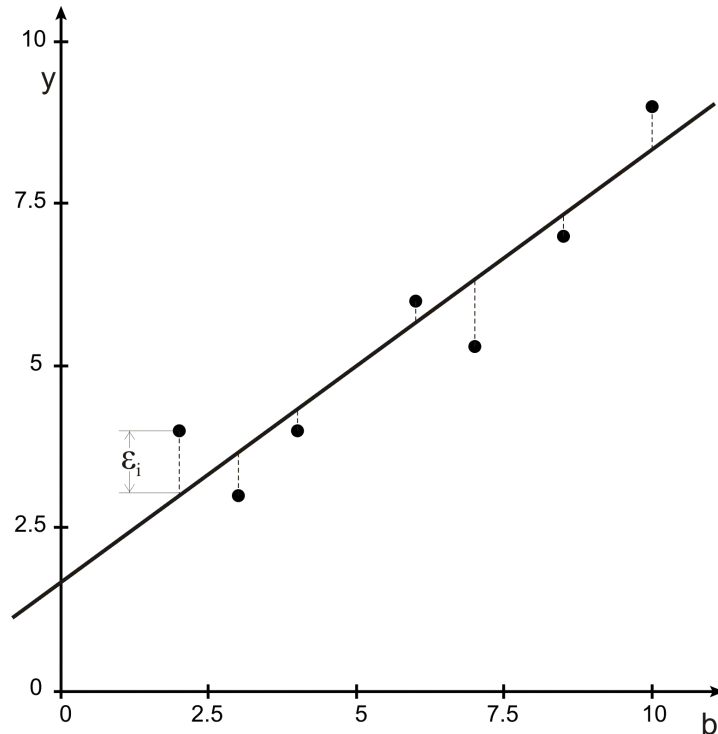
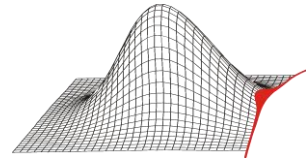
Koeffizienten



Eingangsgrößen

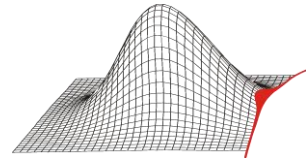


1. Punktwolke aus MCS
2. Typ der Antwortfläche festlegen
3. Koeffizienten so bestimmen, dass Summe der Fehlerquadrate minimal wird



1. Punktwolke aus MCS
2. Typ der Antwortfläche festlegen
3. Koeffizienten so bestimmen, dass Summe der Fehlerquadrate minimal wird

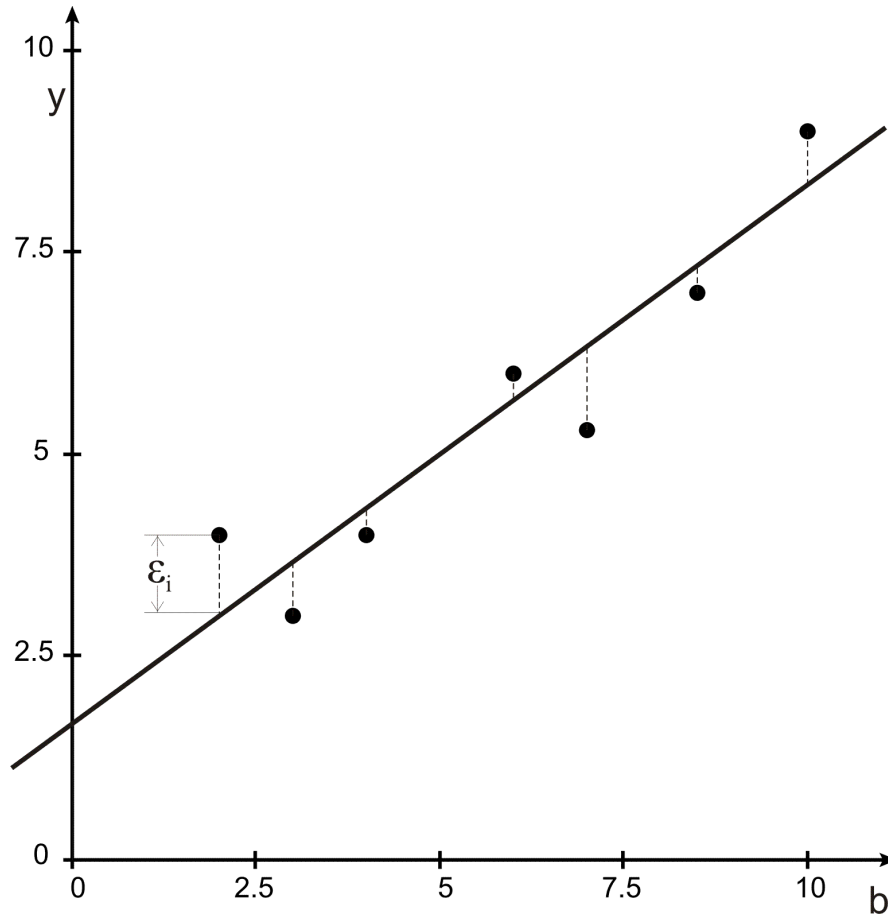
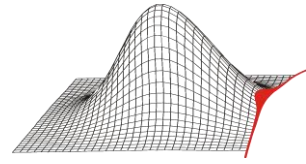
$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2 \longrightarrow \text{Minimum}$$



- Zur Bewertung der Güte von Antwortflächen kann das Bestimmtheitsmaß R^2 verwendet werden
- Das Bestimmtheitsmaß R^2 beschreibt den Anteil der Streuung der Ergebnisgröße, die sich durch das Regressionsmodell (die Antwortfläche) beschreiben lässt
- R^2 ist das Quadrat des Korrelationskoeffizienten von y zu $\tilde{y}$

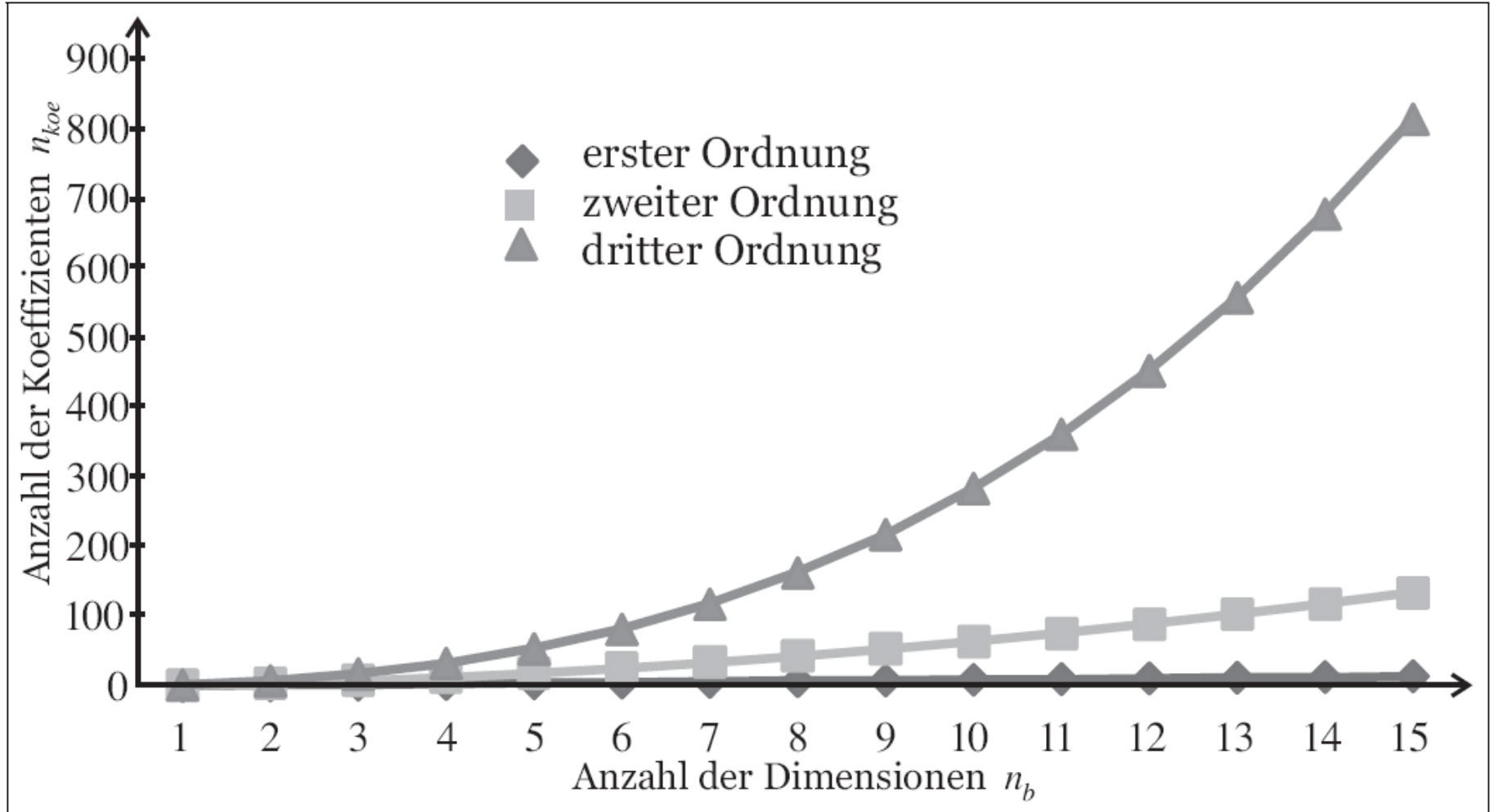
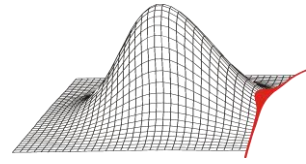
$$R^2 = r^2(y, \tilde{y})$$

- $R^2 = 0..1$

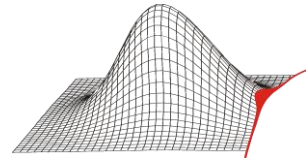


$$R^2=0,87$$

$$y = 1,68 + 0,65*b + \varepsilon$$



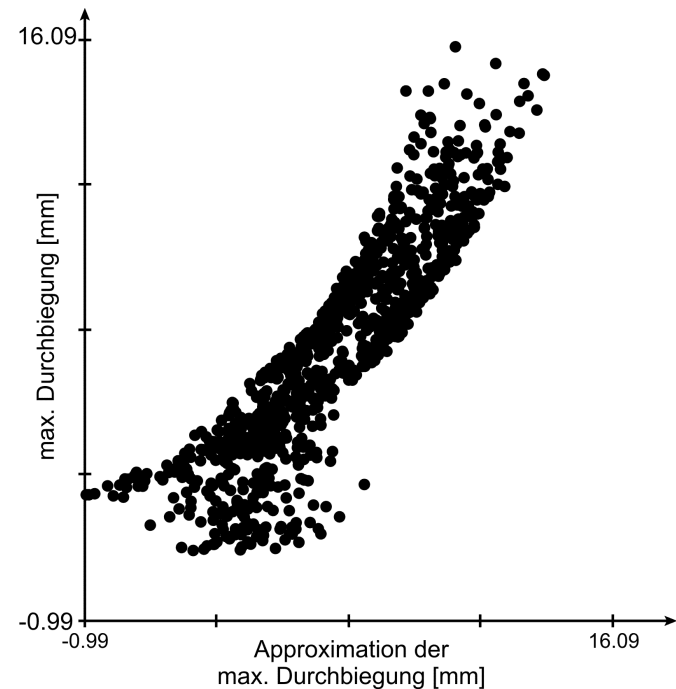
Anzahl der Stützpunkte $\geq$ Anzahl der Koeffizienten

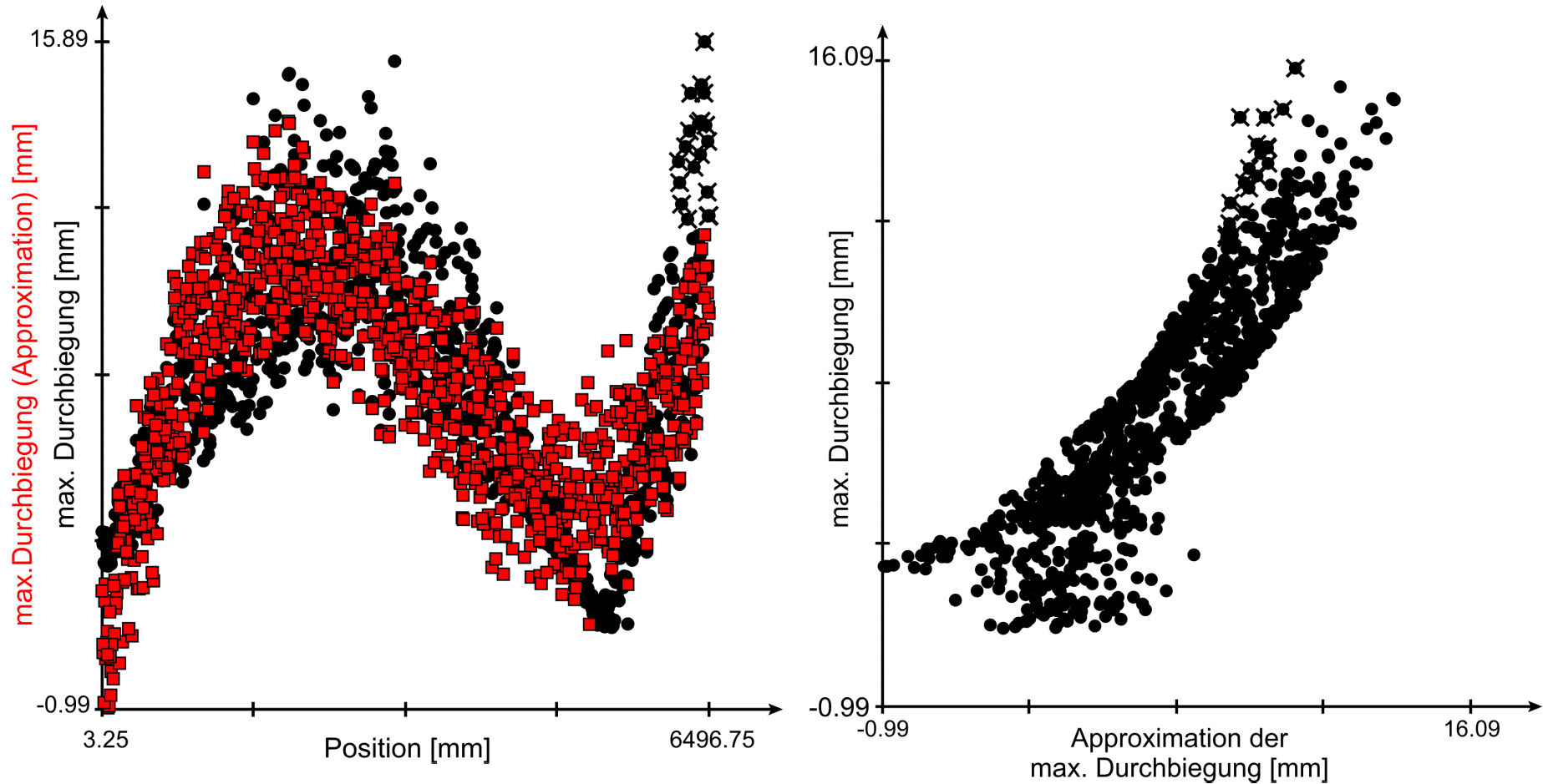
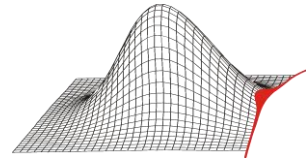


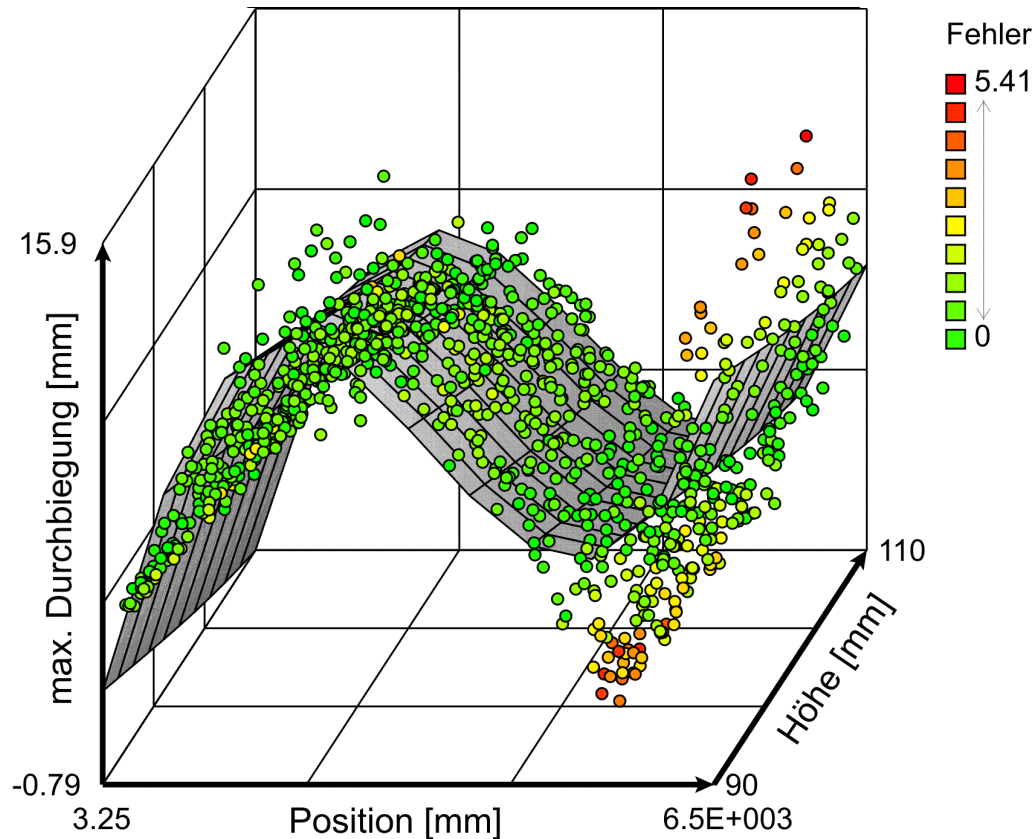
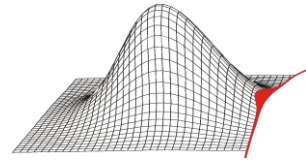
Träger Beispiel:

- 5 Eingangsgrößen
- Polynom 3. Ordnung (16 Koeffizienten)
- Gleiche Parameter Streuung
- n_{sim} variiert

n_{sim}	R^2
16	1,00
30	0,91
60	0,86
100	0,82
200	0,78
1000	0,79

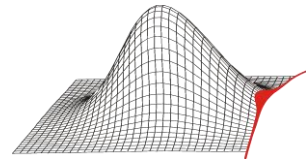






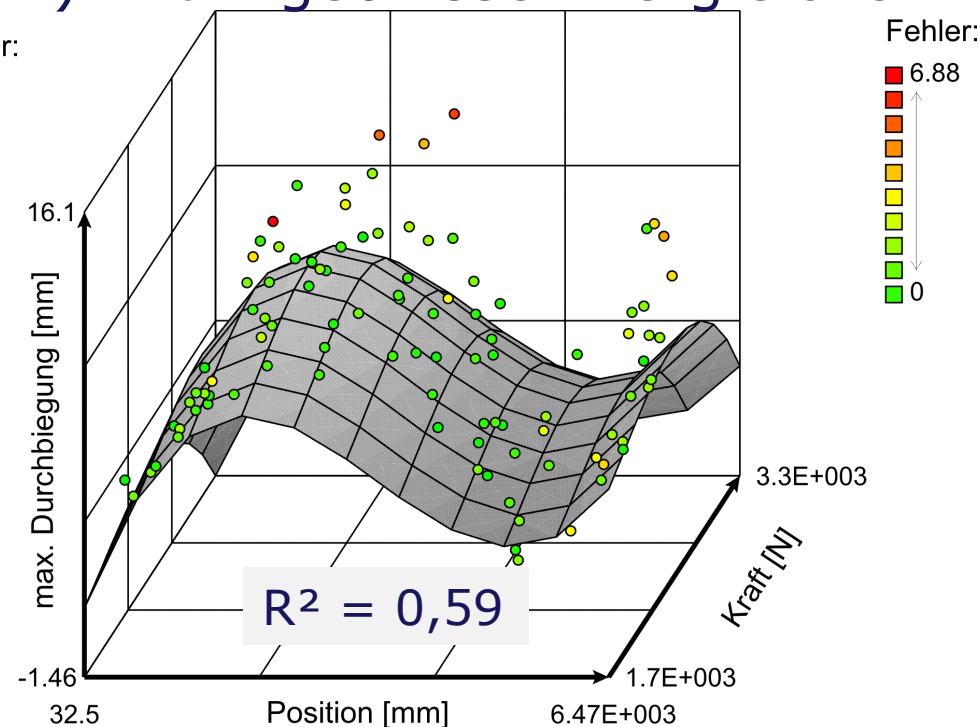
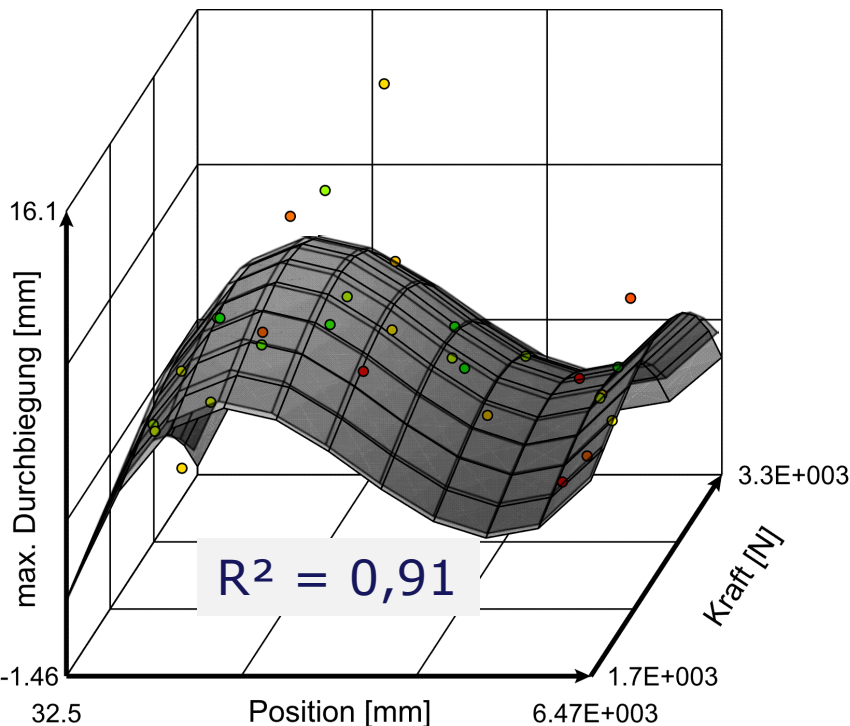
Für $n_b > 2$ entspricht grafischer Abstand zwischen Antwortfläche und Stützpunkten nicht dem Approximationsfehler.

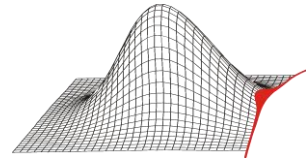
Approximationsfehler kann als Farbinformation dargestellt werden.



Träger Beispiel:

- MCS mit 30 Shots
 - Antwortfläche berechnen
- MCS mit 100 Shots
 - Antwortfläche (aus 1. Sim) mit Ergebnissen vergleichen



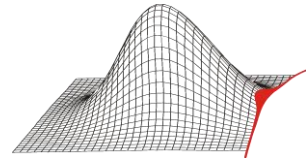


Vorteile:

- Weit verbreitetes Maß zur Güte
- Vergleichbares, normiertes Maß des Approximationsfehlers
- Beschreibt den Anteil der Ergebnisgrößenstreuung, der durch das Modell beschrieben werden kann

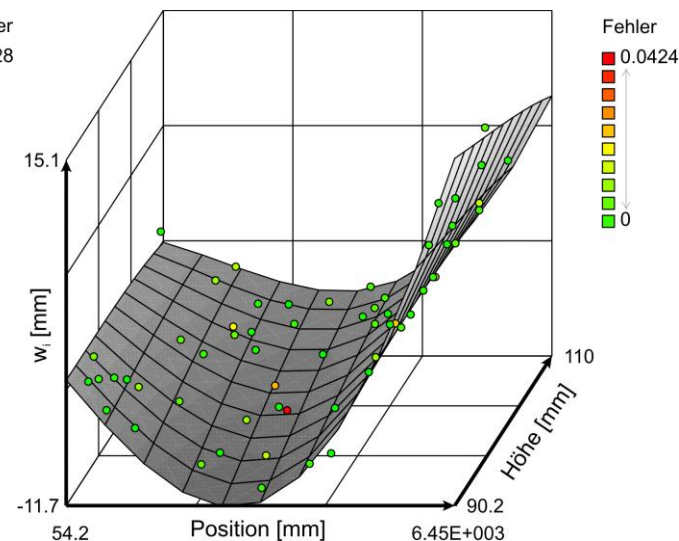
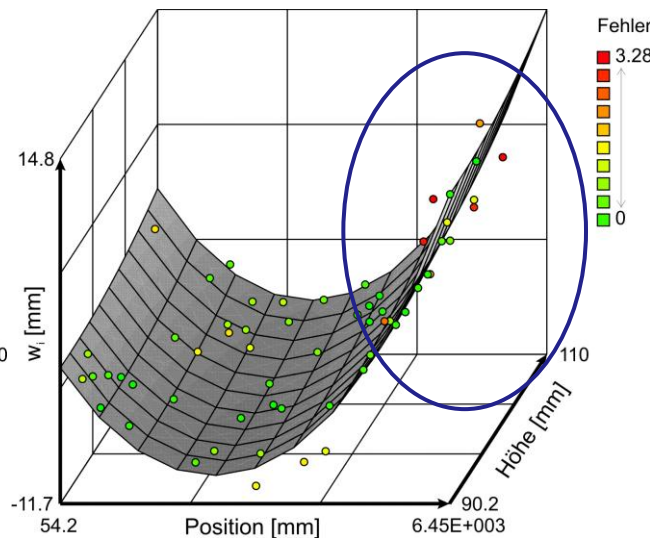
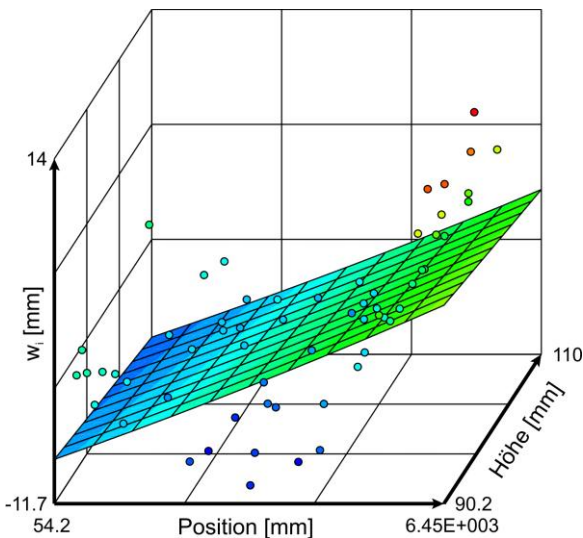
Nachteile:

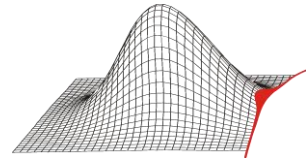
- abhängig von der Anzahl der Stützpunkte
- Keine Aussage zum maximalen Fehler
- Macht nur Aussagen an den Stützpunkten
 - Hoher R^2 garantiert keine gute Vorhersagen



Eine grafische Kontrolle der Antwortflächen ist empfehlenswert

- Entspricht die Form der Antwortfläche der Punktwolke?
- Wo sind die Fehler groß?
- Sind die Fehler im Vergleich annehmbar?





COI – Coefficient of Importance [9]

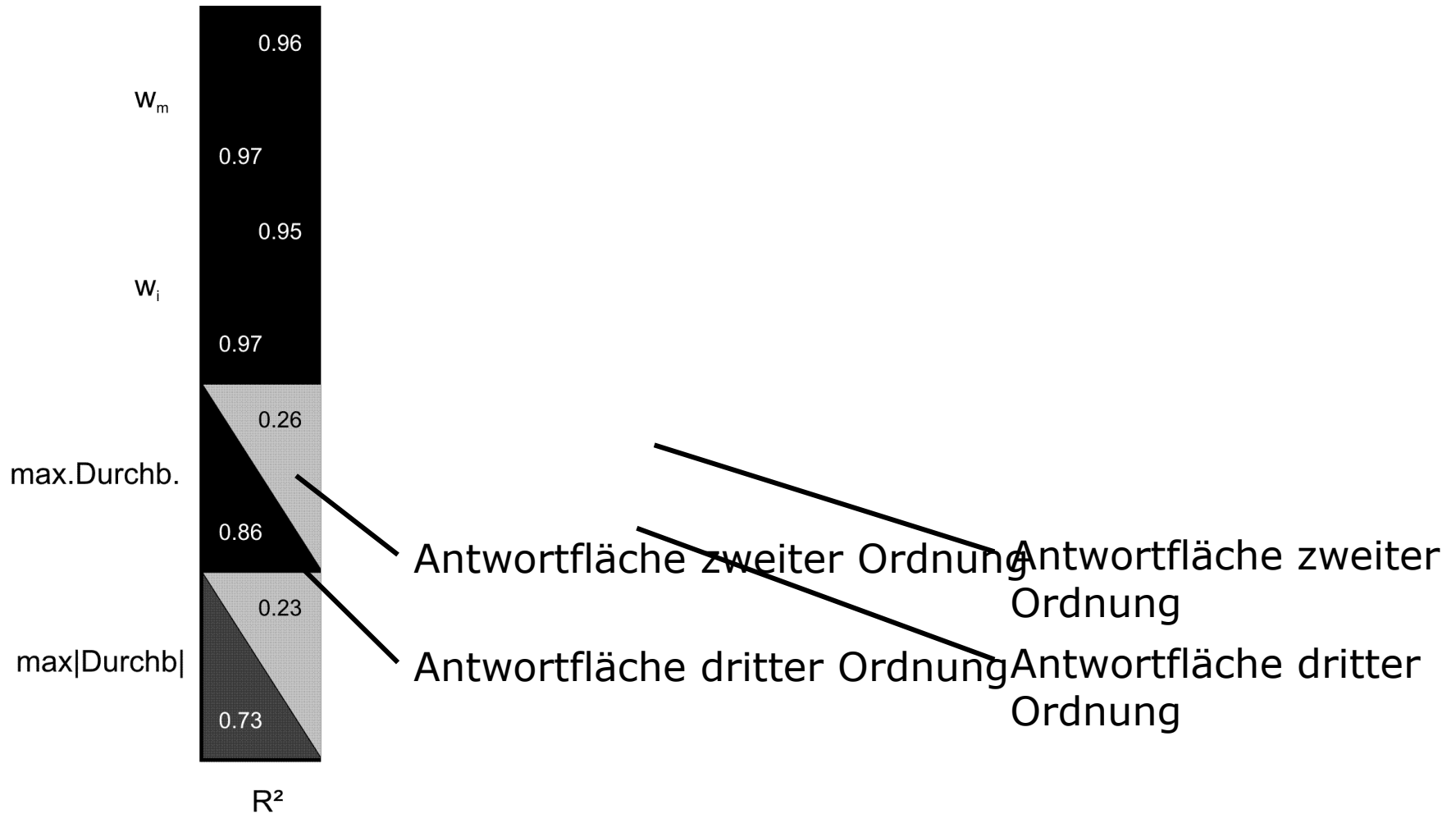
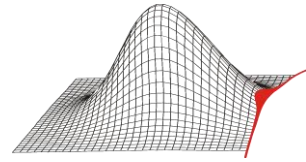
Bewertet den Einfluss einer Eingangsgröße auf eine Ausgangsgröße, über Antwortflächen.

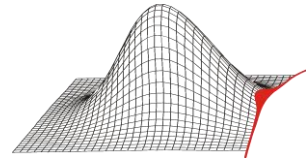
$$COI = R^2 - R_e^2$$

R^2 : Bestimmtheitsmaß der Antwortfläche

R_e^2 : Bestimmtheitsmaß einer Antwortfläche, bei der der Einfluss einer Eingangsgröße $\mathbf{b}_e$ nicht berücksichtigt wird

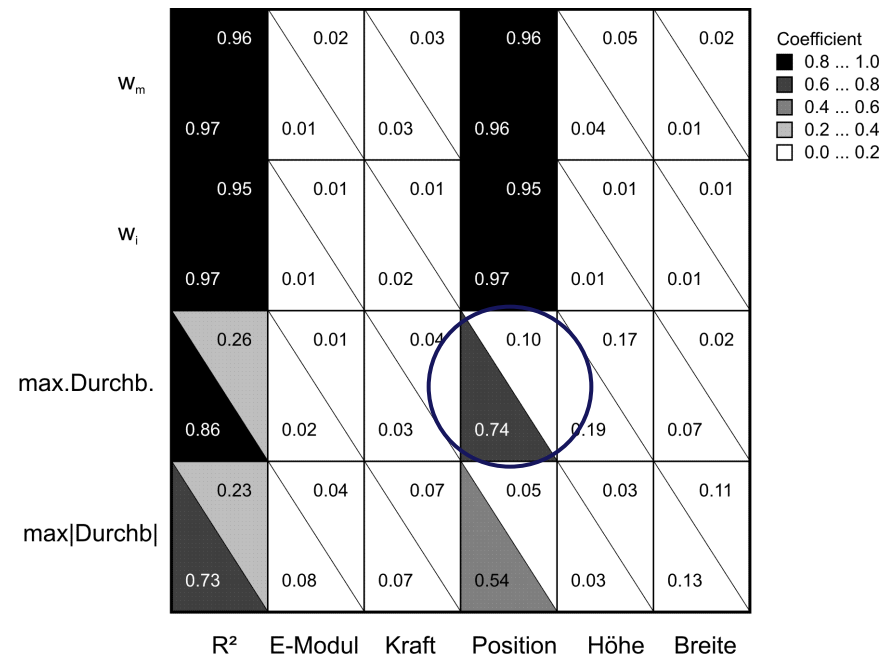
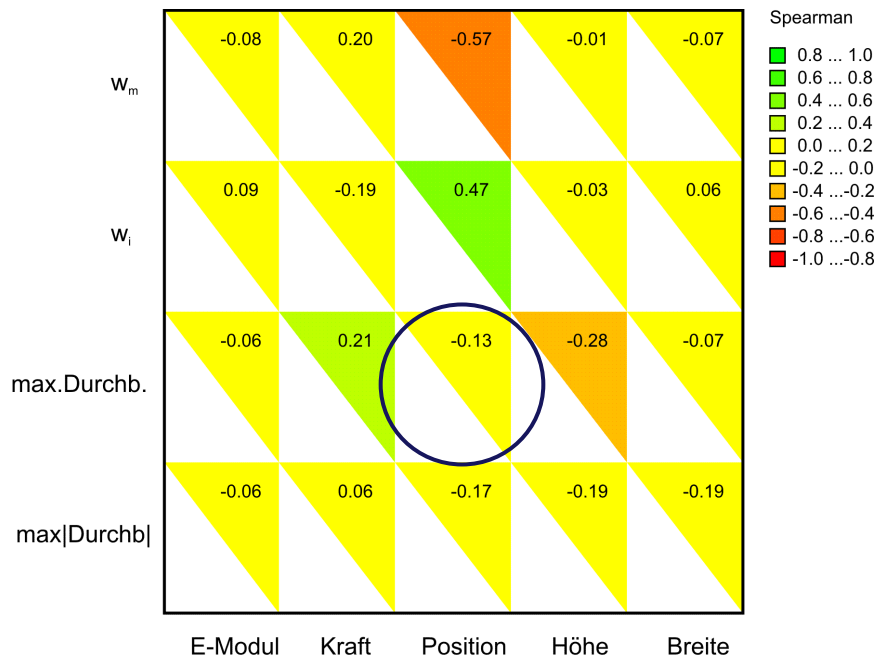
Wenn nicht berücksichtigte Eingangsgröße wichtig war, dann ist $R_e^2 \ll R^2$ und daher hoher COI.

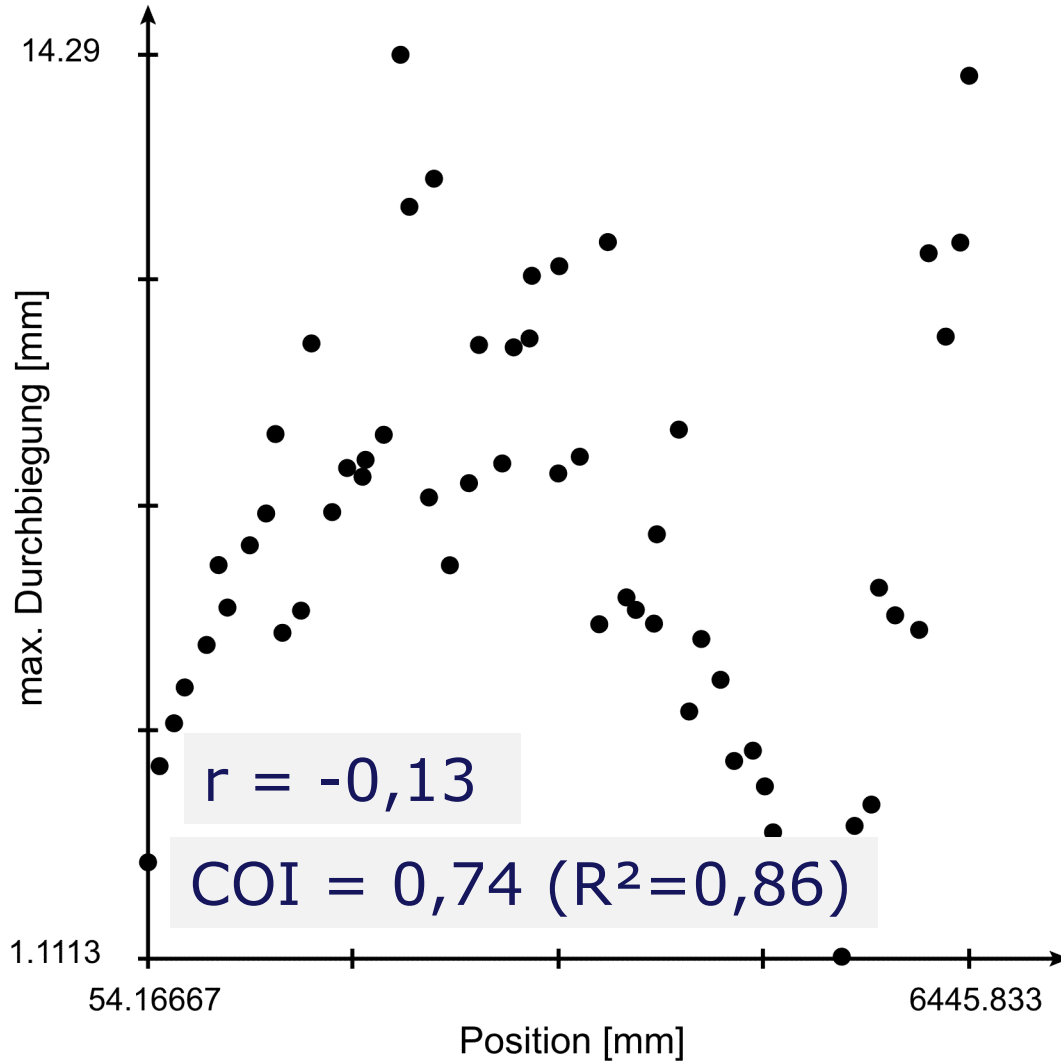
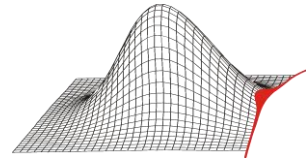


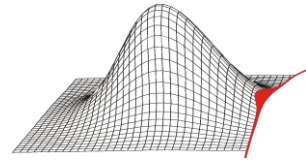


Vorteile der COI-Matrix gegenüber der Korrelationsmatrix zur Sensitivitätsanalyse:

1. „fokussierte“ Sensitivitätsaussage
2. Erkennen von nicht monotone Zusammenhänge

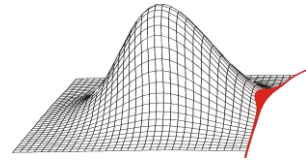






Wann sind Antwortflächen als Meta-Model geeignet?

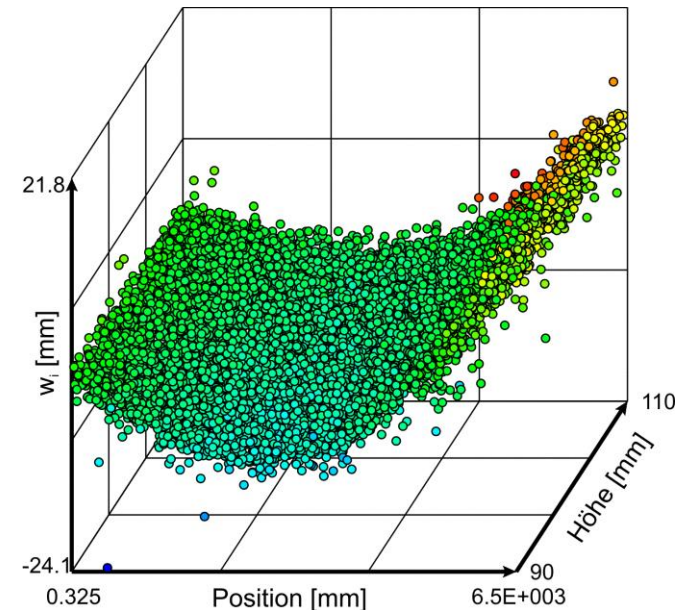
- Wenn die Antwortfläche das Systemverhalten gut beschreibt, dazu gibt es folgende Indizien:
 - $R^2 \geq 0,8$
 - Approximationsfehler im „interessantem“ Bereich gering

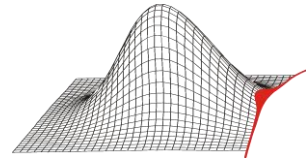


Sind die Antwortflächen validiert, kann eine neue MCS mit sehr vielen (~ 10.000) Shots aufgesetzt werden. Die Antwortfläche dient dabei als Berechnungsmodell.

Vorteil: Rechengeschwindigkeit ($10.000 \text{ Shots} < 1 \text{ Sek}$)

Aus den 10.000 MCS werden nun der/die beste(n) Shot(s) mit dem deterministischen Modell überprüft.





- Designraum in Felder der Fertigungstoleranz einteilen.
- In jedem Feld eine MCS ausführen
- Variation der Ergebnisgröße über den Designraum grafisch darstellen

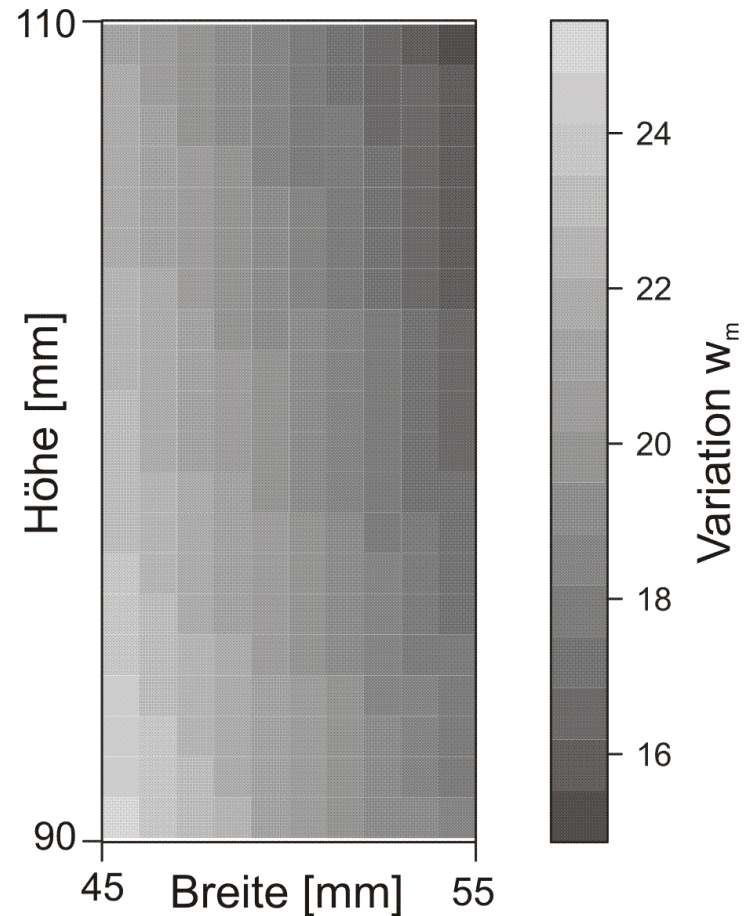
✕ Designpunkt

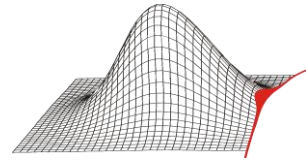


Fertigungstoleranz



Simulationsraum





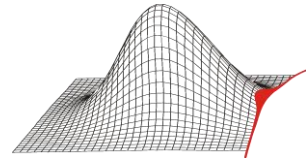
Box-Cox-Transformation [6]

$$y = c_o + \sum_{i=1}^{n_b} c_i b_i + \sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=1}^{n_b} c_{ij} b_i b_j + \varepsilon$$

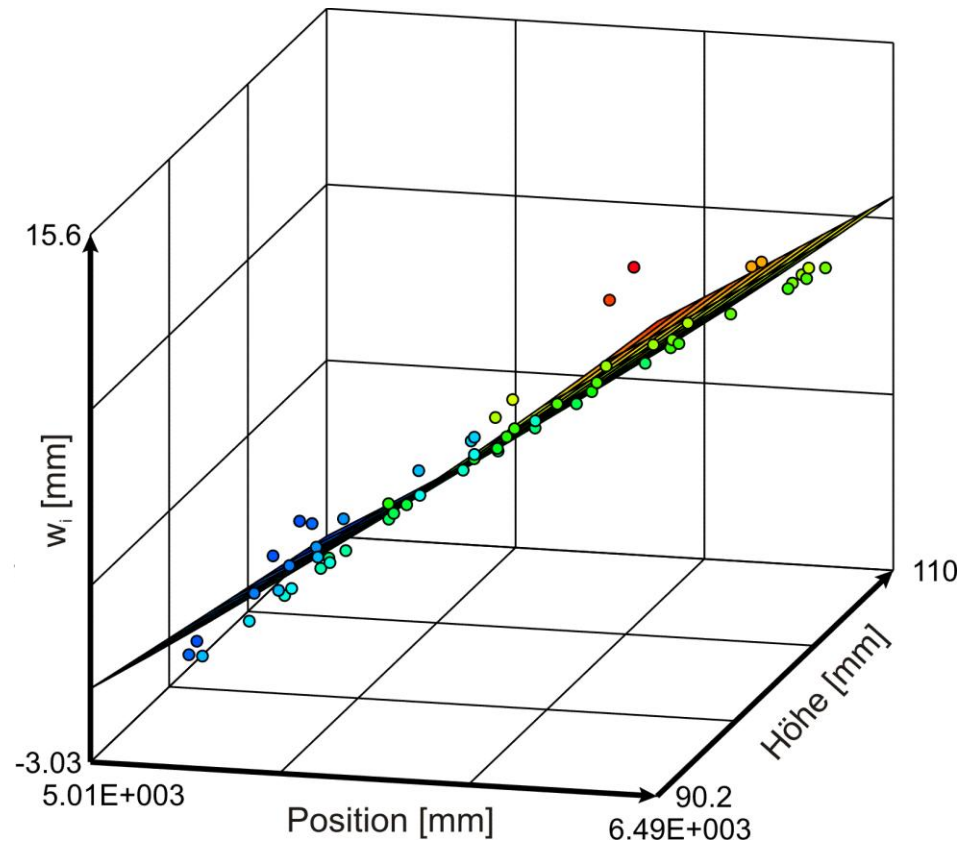
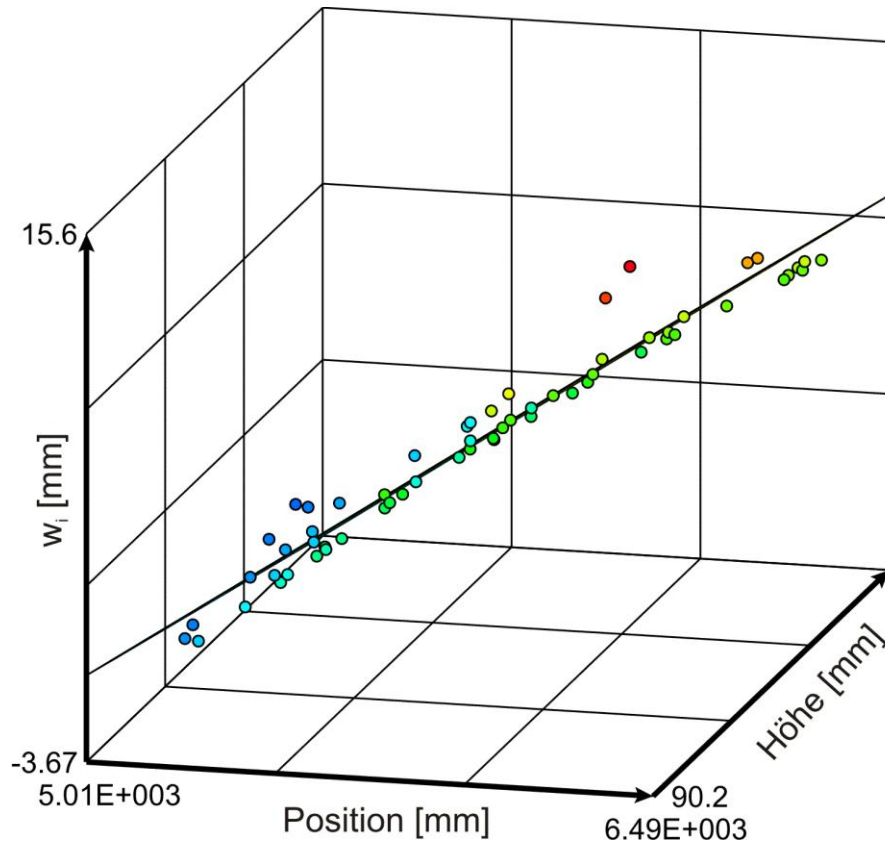
Skalierung der y-Werte zur besseren Anpassbarkeit der Antwortfläche.

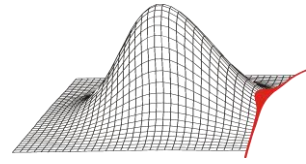
$$y^s = \bar{c}_0 + \sum_{k=1}^{n_b} \bar{c}_k b_k + \sum_{k=1}^{n_b} \sum_{m=1}^{n_b} \overline{c_{km}} b_k b_m + \bar{\varepsilon}$$

Variable s wird so gewählt, dass sich die Summe der Fehlerquadrate weiter reduziert.
 $s = [0,1 \dots 2,0]$

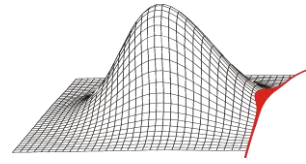


Box-Cox-Transformation



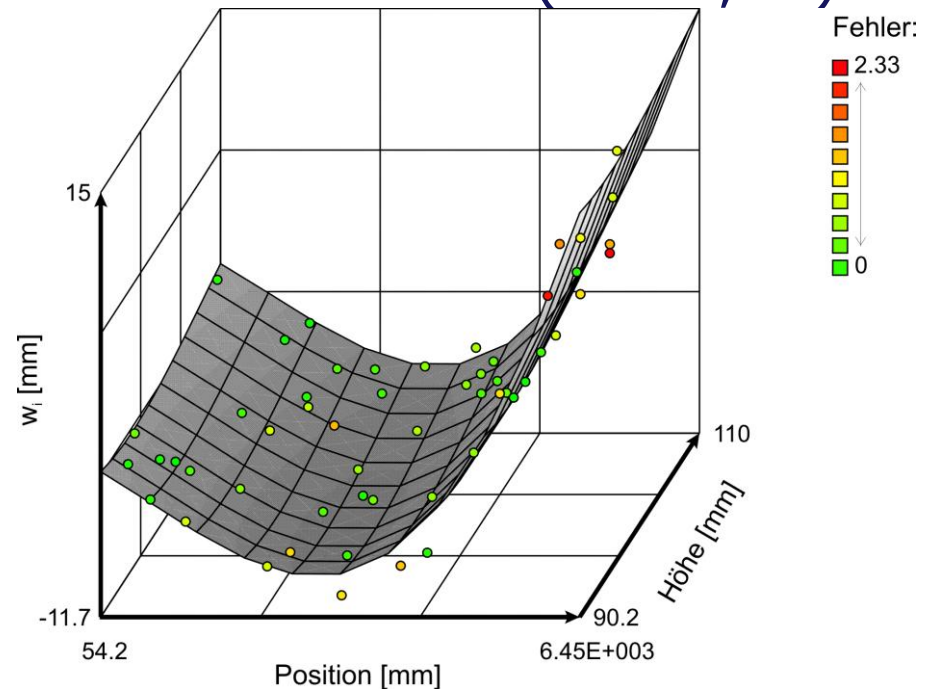


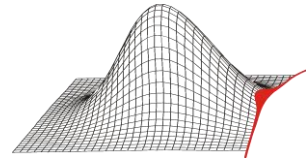
Eine Möglichkeit Antwortflächen zu verbessern ist es, einen Teil der Stützpunkte bei der Berechnung der Antwortfläche nicht zu berücksichtigen, sondern damit die Antwortfläche zu validieren.



Training der Antwortfläche: Träger-Beispiel:

- $n_{\text{sim}} = 60$
- 6 Shots aussortiert
- Mit 54 Shots Antwortfläche berechnet ($R^2 = 0,98$)

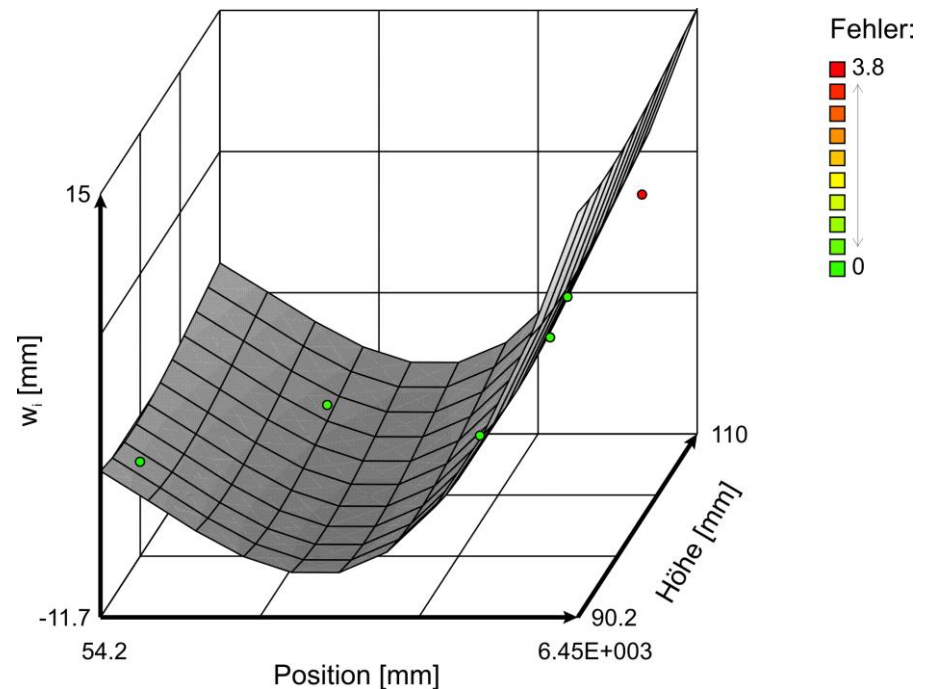


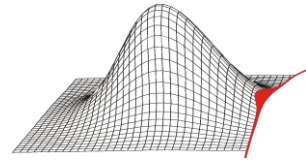


Training der Antwortfläche:

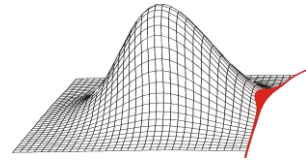
Träger-Beispiel:

- Mit Antwortfläche der Ergebnisgröße der 6 Shots berechnet
- R^2 von Rechnung und Antwortfläche berechnet ($R^2=0,88$)

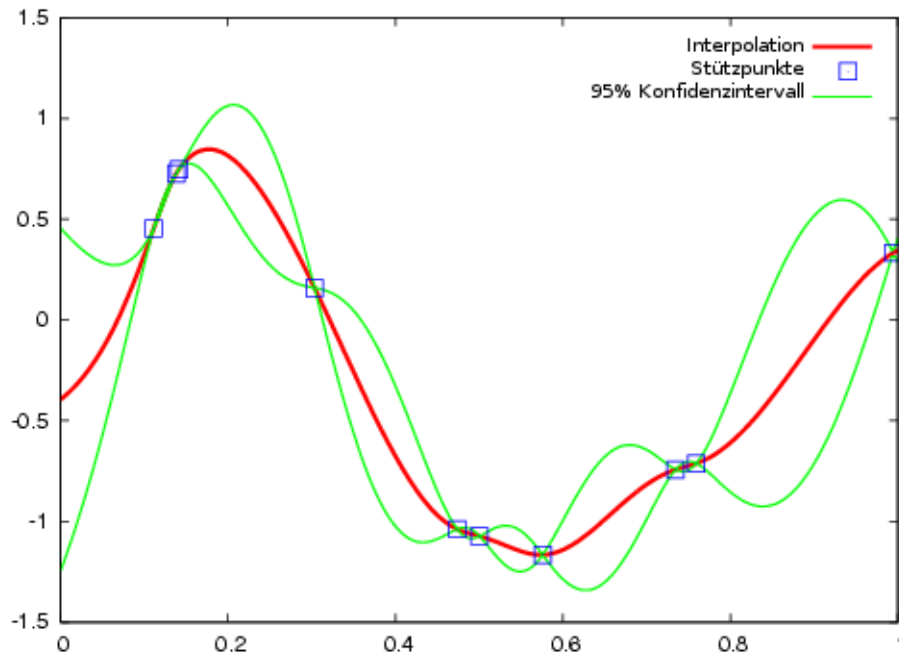


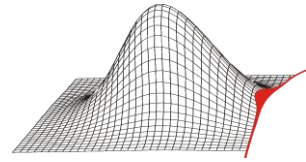


- Bessere Ergebnisse der Antwortflächen lassen sich erreichen, wenn weitere Stützpunkte zur Anpassung oder Validierung vorliegen.
- Wenn es auf die Rechenzeit ankommt, können entsprechende statistische Methoden genutzt werden um Pseudo-Stützpunkte zu erzeugen
- Eine dieser Methoden nennt sich Kriging [17] oder auch Gauß-Prozess



Kriging ist ein statistisches Interpolationsverfahren, dass auf Annahme einer normalverteilten Ergebnisgröße wahrscheinlichste Punkte schätzt und zusätzlich die Unsicherheit angibt.



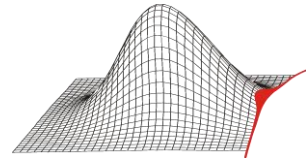


Antwortflächen sind mathematische Beschreibungen des Systemverhaltens. Sie können genutzt werden, um

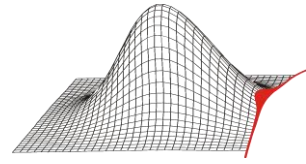
- Sensitivitäten zu detektieren (für $R^2 > 0,8$)
- Das deterministische Modell zu ersetzen

Das **Bestimmtheitsmaß** beschreibt die Güte der Antwortfläche, liefert jedoch keine Informationen

- über den maximalen Fehler
- Zum Approximationsfehler zwischen den Stützstellen



- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- Samplingmethoden
- Regressionen
- Zusammenfassung



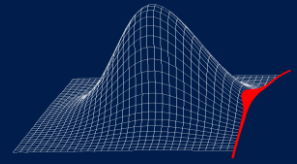
Probleme

Vorteile

bei der Anwendung der probabilistischen Methoden

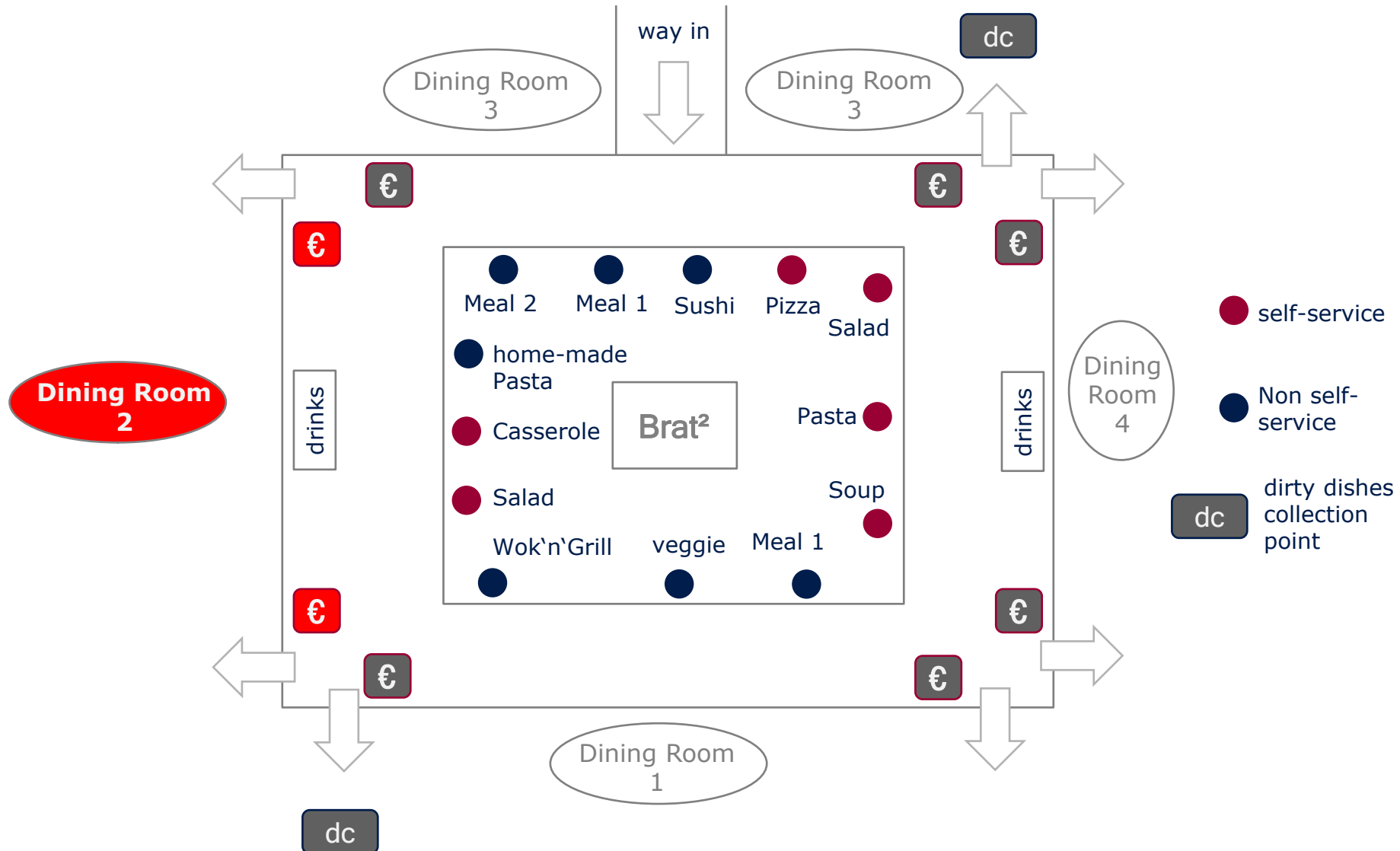
- ausreichende Datenbasis für stochastische Variablen
- höherer Ingenieuraufwand parametrische Modelle bezüglich der stochastischen Variablen, Interpretation der Ergebnisse
- hoher Berechnungsaufwand durch mehrfache deterministische Systemanalysen

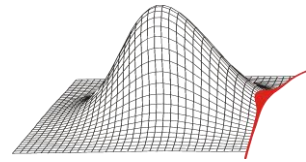
- Versagenswahrscheinlichkeit keine akkumulierten konservativen Annahmen
- Robustheit des Designs
- Sensitivität bezüglich der stochastischen Variablen
- Kostengünstigeres Design größere Toleranzen wenn möglich, kleinere Toleranzen wenn nötig



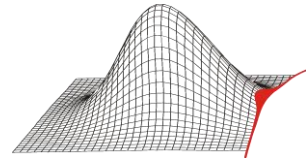
Probabilistische Methoden in der Anwendung

Matthias Voigt
Robin Schmidt
Thorsten van Lil

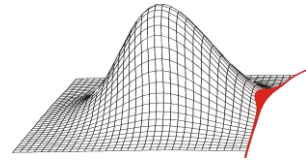




- [1] SACHS, L.: *Angewandte Statistik, Anwendung statistischer Methoden*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2004.
- [2] KECECIOGLU, D.: *Reliability and Life Testing Handbook*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 1993.
- [3] FISHER, R. A.: *Statistical Methods for Research Workers*. Oliver & Boyd, Edinburgh, 1970.
- [4] MONTGOMERY, D. C.: *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley & Son, Inc, New York, 2001.
- [5] MYERS, R. H.; MONTGOMERY, D. C.: *Response Surface Methodology*. John Wiley & Son, Inc, New York, 1995.
- [6] NETER, J.; KUTNER, M. H.; NACHTSHEIM, C. J.; WASSERMANN, W.: *Applied Linear Statistical Models*. WCB McGraw-Hill, New York, 1996.
- [7] BOX, G. E. P.; BEHNKEN, D. W. : *Some New Three-Level Designs for the Study of Quantitative Variables*. Technometrics, University of Princeton:455–475, 1960.
- [8] MEE, R. W.: *New Box-Behnken Designs*. TN 37996-0532, Department of Statistics, University of Tennessee, Knoxville, 2001.
- [9] WILL, J.; BUCHER, C.: *Statistische Maße für rechnerische Robustheitsbewertungen CAE gestützter Berechnungsmodelle*. Weimarer Optimierungs- und Stochastiktag 3.0, 2006.
- [10] ANDERSON, T. W.; DARLING, D. A.: *Asymptotic Theory of Certain "Goodness of Fit" Criteria Based on Stochastic Processes*. Annals of Mathematical Statistics 23, Seiten 193–212, 1952.



- [11] STEPHENS, M. A.: *EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 69, Seiten 730–737, 1974.
- [12] WILL, J.; ROOS, D.; RIEDEL, J.; BUCHER, C.: *Robustheitsbewertung in der stochastischen Strukturmechanik*. NAFEMS Seminar: Use of Stochastics in FEM Analyses, 2003.
- [13] MCKAY, M. D.; CONOVER, W. J.; AND BECKMAN, R. J.: *A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code*. Technometrics, 21:239–245, 1979.
- [14] SALIBY, E.: *Descriptive Sampling: An Improvement Over Latin Hypercube Sampling*. Proceedings of the Winter Simulation Conference, 1997.
- [15] BUCHER, C.: *Computational Analysis of Randomness in Structural Mechanics*. CRC Press/Balkema, Netherlands, 2009.
- [16] VOIGT, M.: *Probabilistische Simulation des strukturmechanischen Verhaltens von Turbinenschaufeln*. Dissertation, TU Dresden, TUDpress, Verlag der Wissenschaft GmbH, 2009.
- [17] STEIN, M. L.: *Interpolation of spatial data / some theory for kriging*. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York, 1999.



Vor- und Nachteile der Sampling-Methoden

SRS

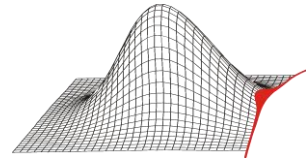
- Zufallszahlen werden „unsystematisch“ erzeugt
- Liefert bei geringen Stichprobenumfang hohe statistische Unsicherheiten

LHS / DS

- Zufallszahlen werden „systematisch“ erzeugt
- Beschreibt die Zufallsvariablen mit wenigen Realisierungen gut

Problem

- Einstellung der Korrelationen zwischen den Zufallsvariablen

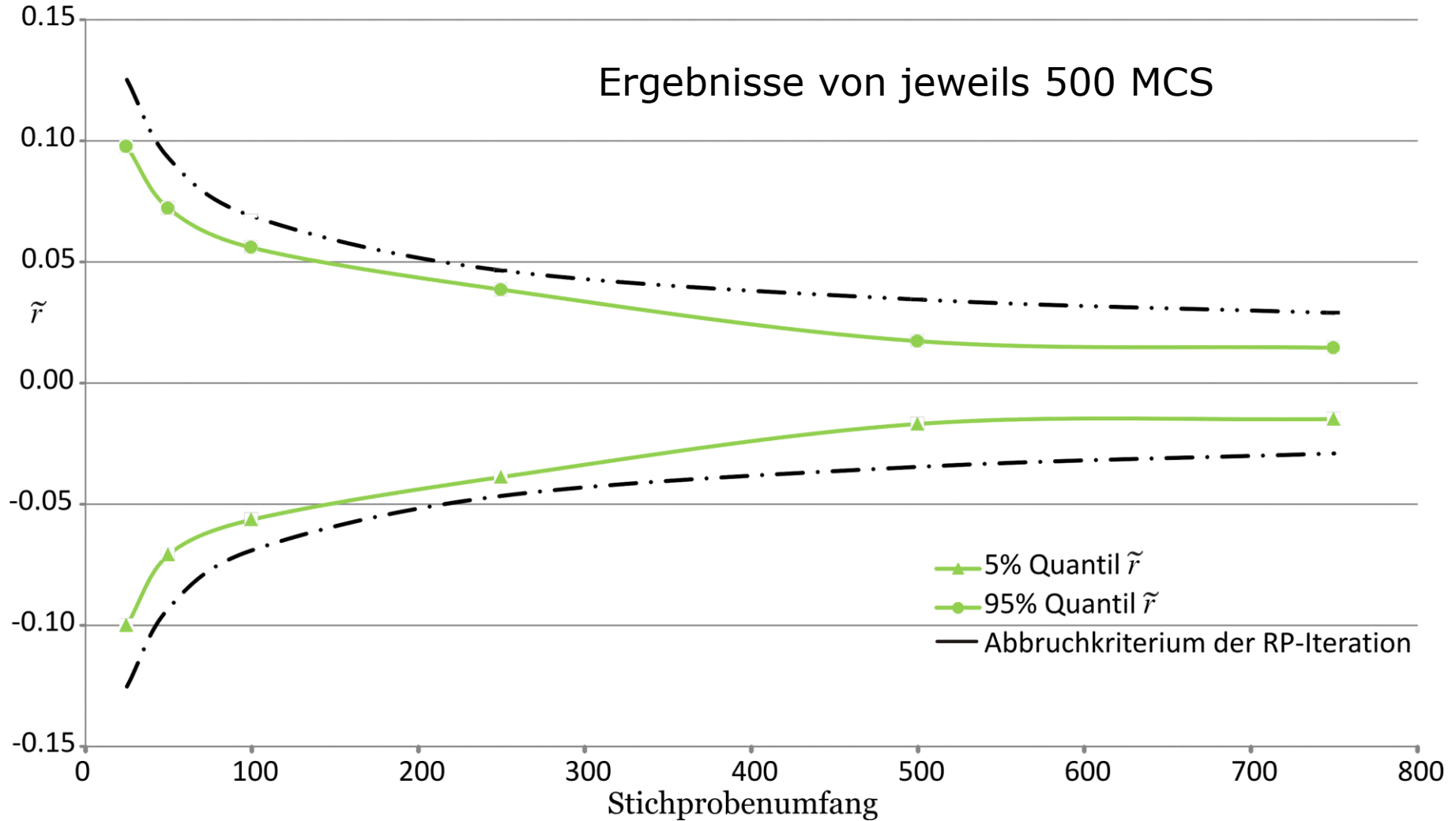
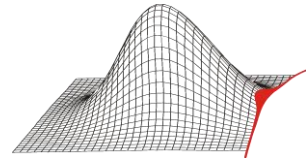


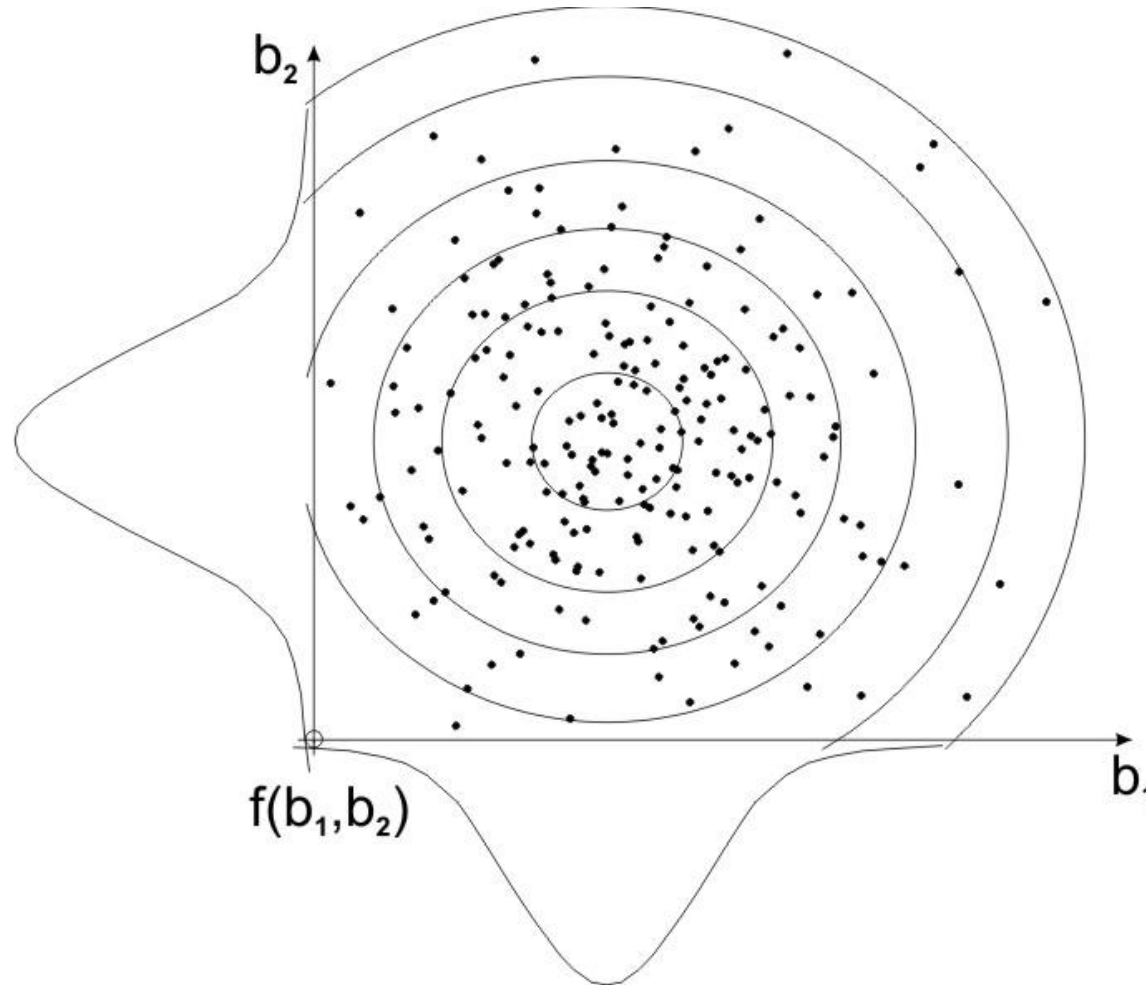
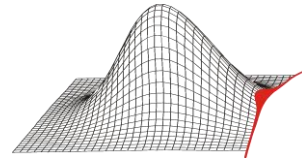
Restricted-Pairing wird in ProSi verwendet, um beliebige Korrelationsstrukturen zwischen Eingangsgrößen zu erzeugen.

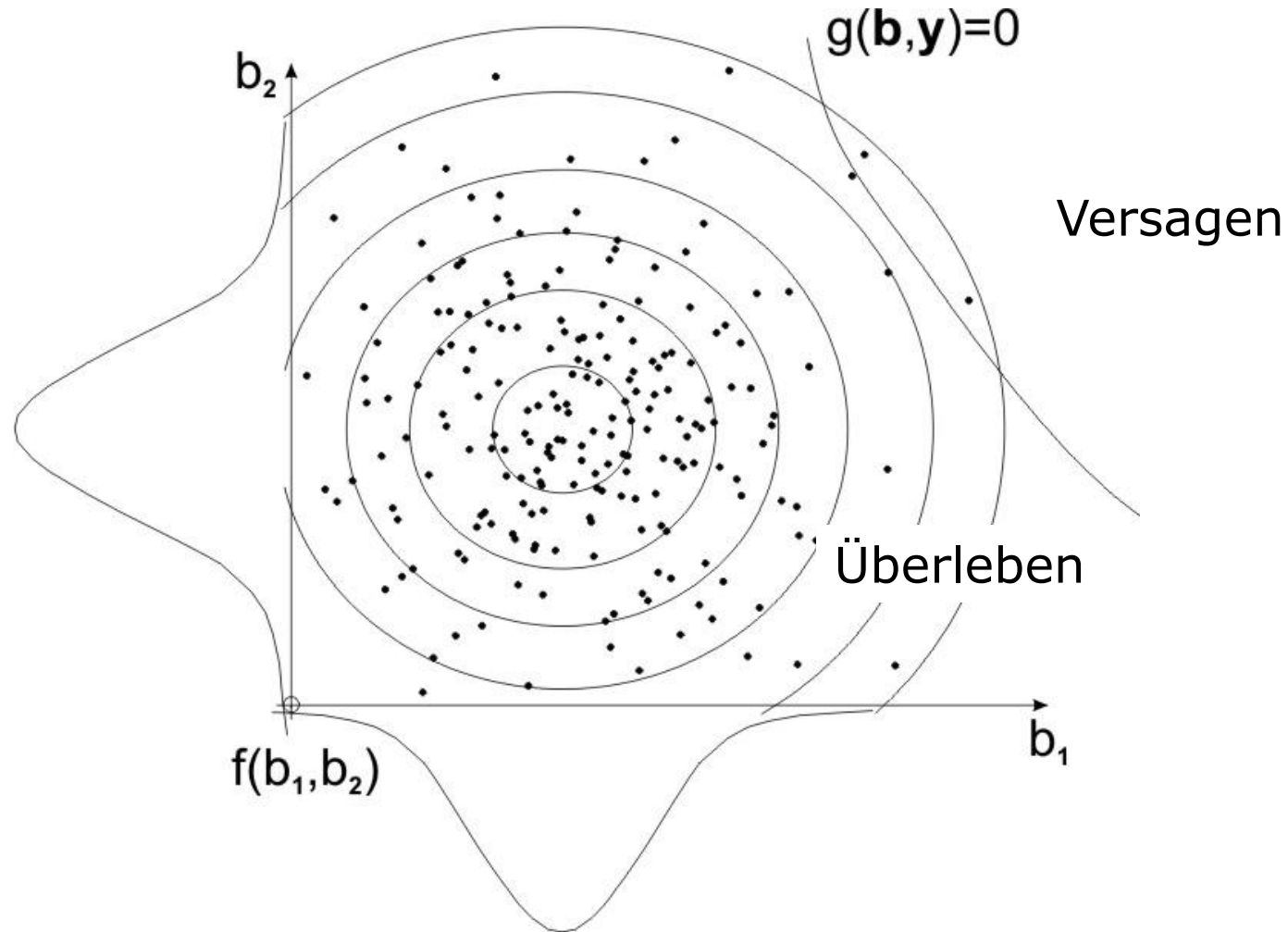
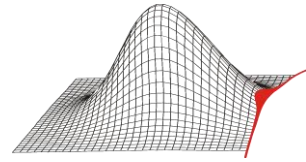
- Ausgangspunkt: Zielkorrelationsmatrix
 - symmetrisch positiv semidefinite Matrix
- Iterative Methode → geeignetes Abbruchkriterium

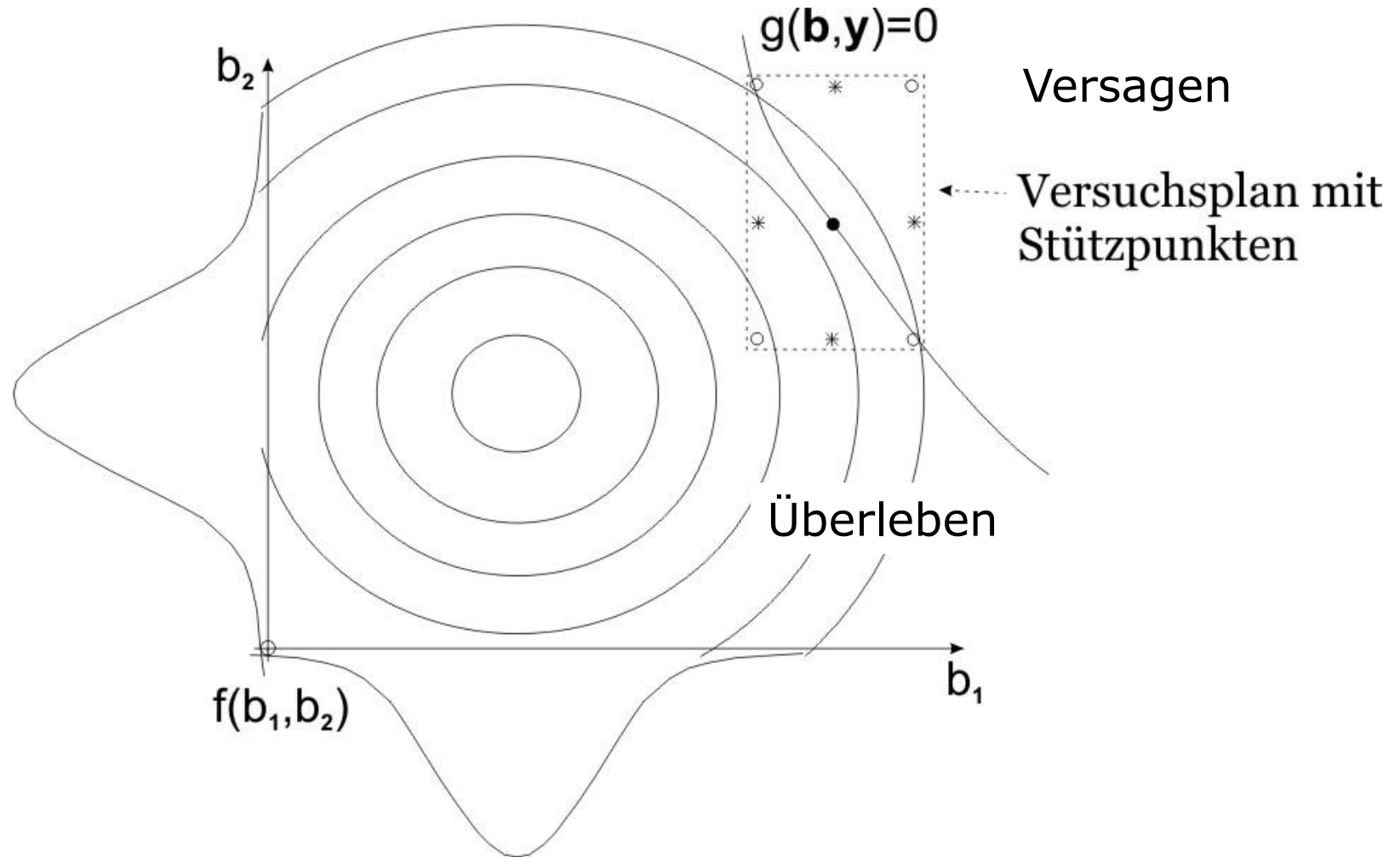
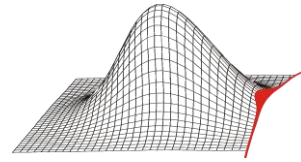
$$\max |\Delta r| = 0.5 * n_{sim}^{-0.43}$$

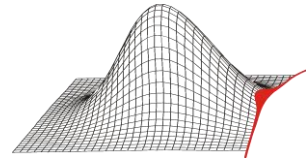
[16]





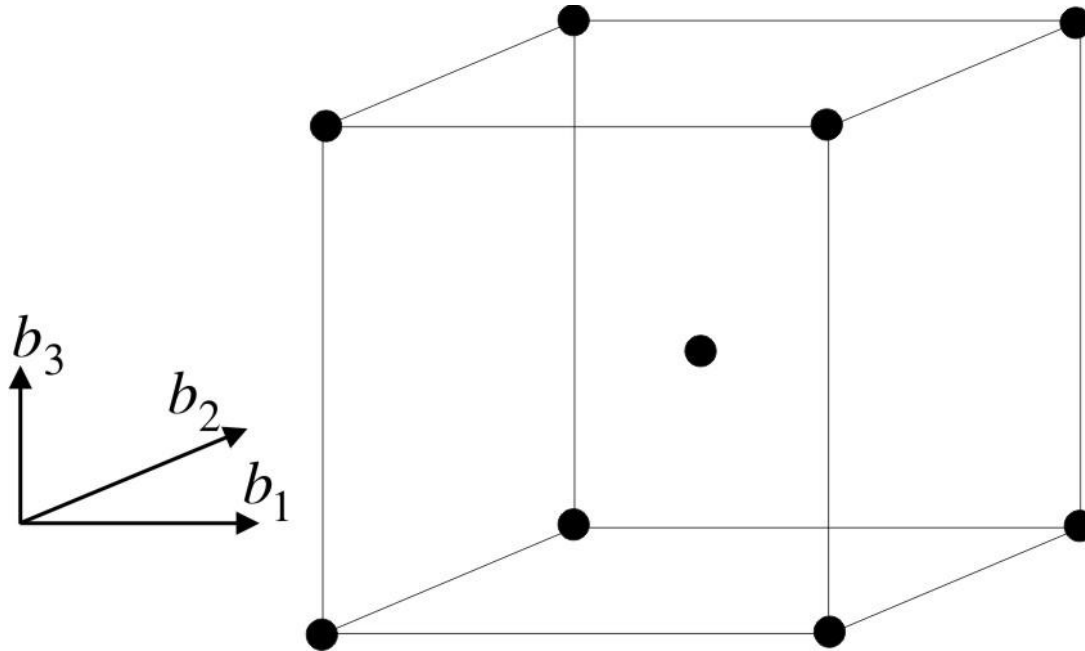


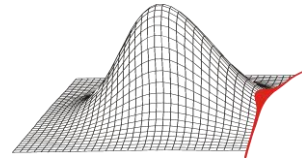




Vollfaktorieller Versuchsplan

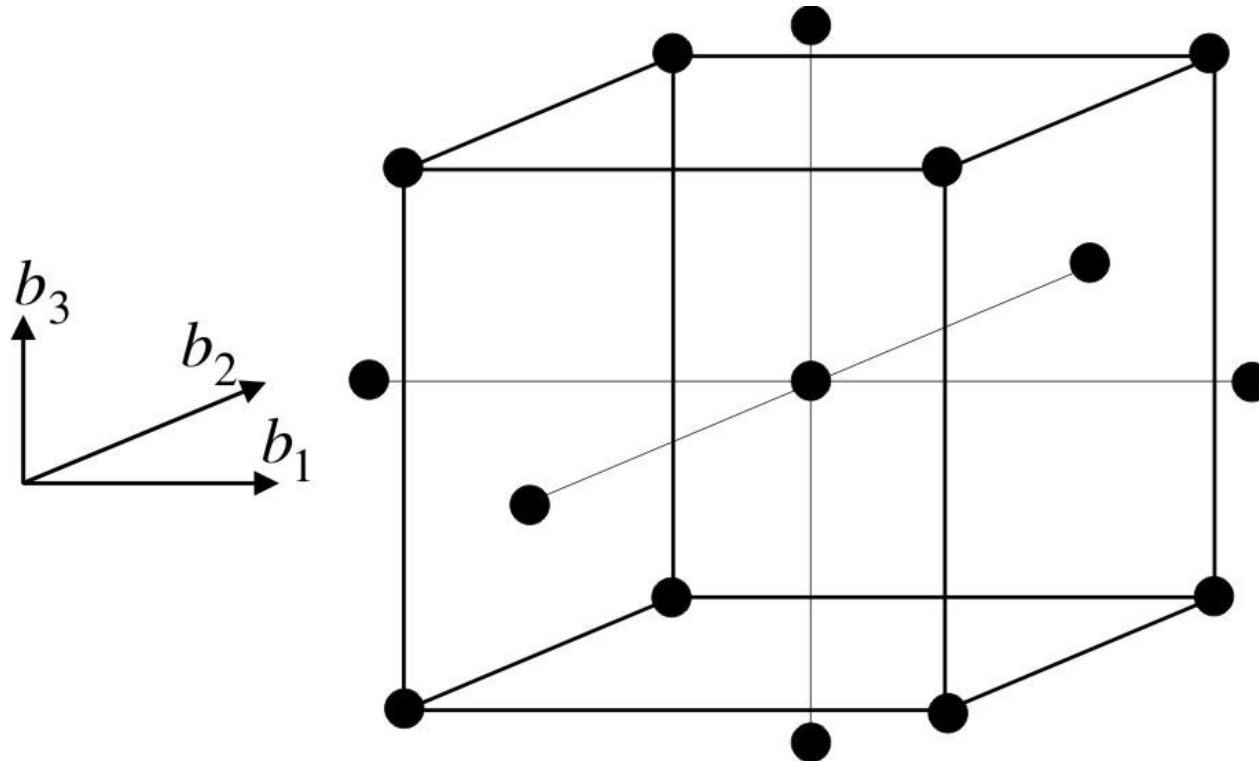
[4,5,6]

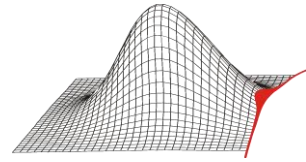




Central-Composite-Design

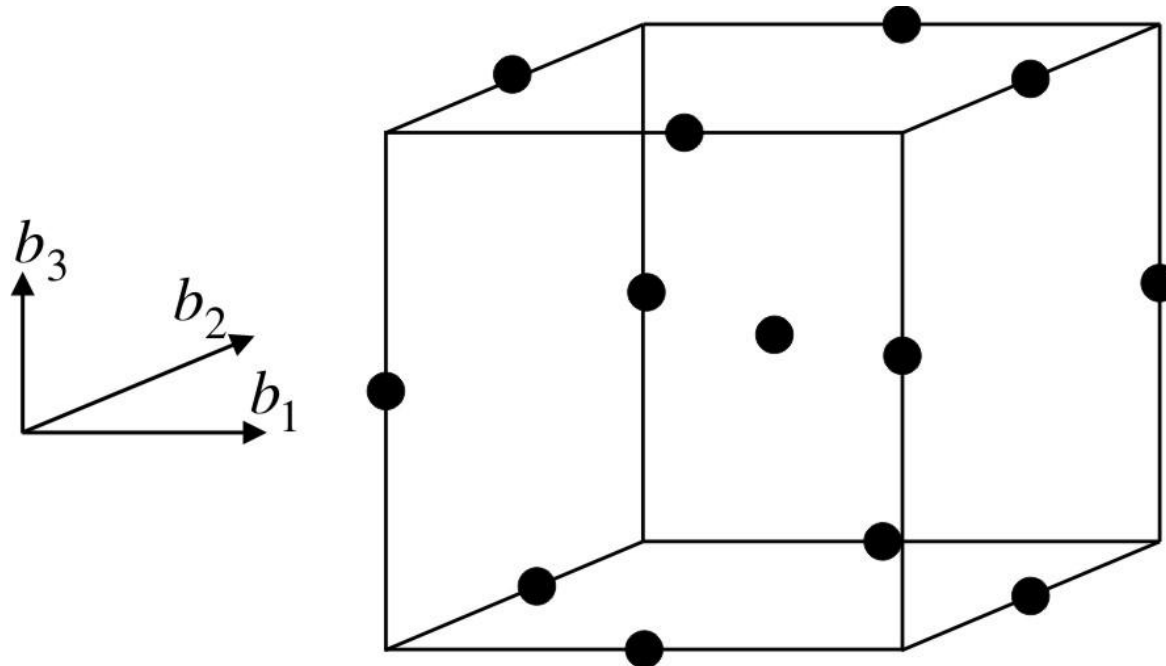
[4,5,6]

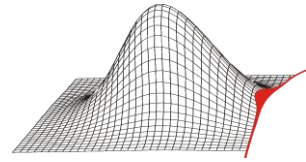




Box-Behnken-Design

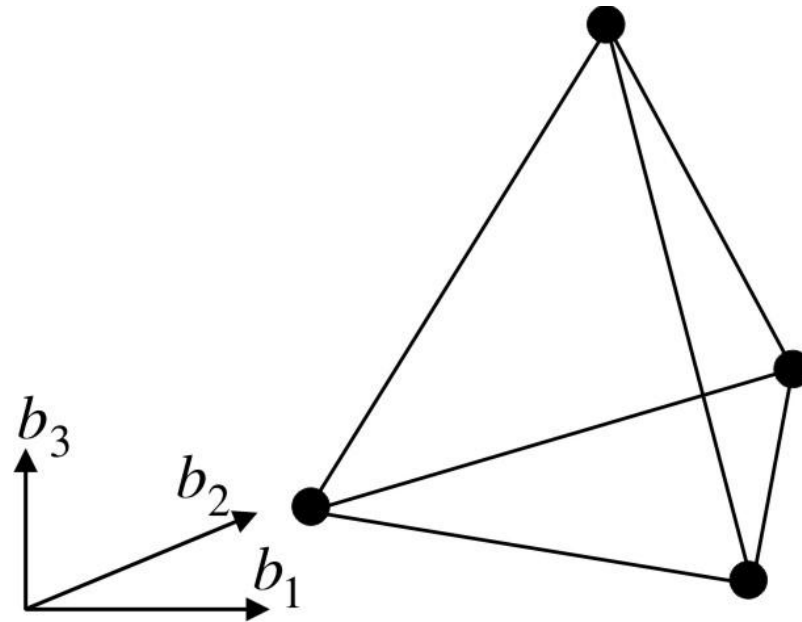
[4,5,6]

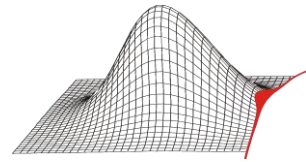




Simplex-Design

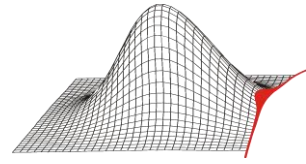
[4,5,6]





Variablenanzahl	Polynom			Simplex	vollfakt. Versuchsplan	CCD	BBD *
	1.Ordnung	2.Ordnung	3.Ordnung				
1	2	3	4				
2	3	6	10	3	5	9	
3	4	10	20	4	9	15	13
4	5	15	35	5	17	25	25
5	6	21	56	6	33	43	41
6	7	28	84	7	65	77	49
7	8	36	120	8	129	143	57
8	9	45	165	9	257	273	113
9	10	55	220	10	513	531	121
10	11	66	286	11	1025	1045	161
11	12	78	364	12	2049	2071	177
12	13	91	455	13	4097	4121	193
13	14	105	560	14	8193	8219	209
14	15	120	680	15	16385	16413	225
15	16	136	816	16	32769	32799	241

* Bei den Variablenanzahlen 3-7 und 9-12 sind die originalen BBD [7] dargestellt die anderen beruhen auf Veröffentlichungen von Mee [8]



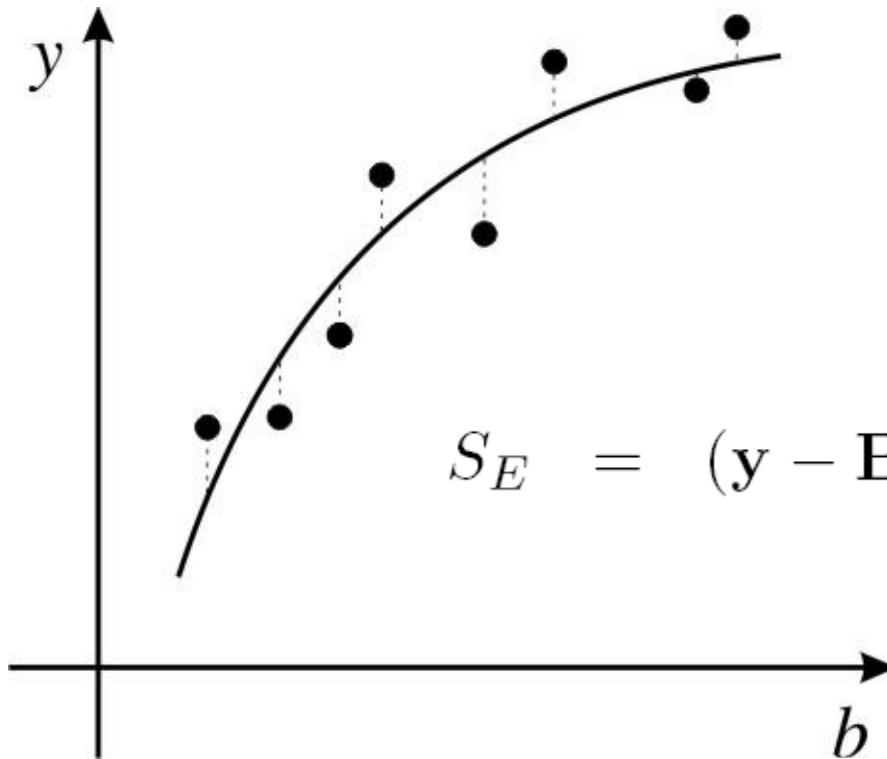
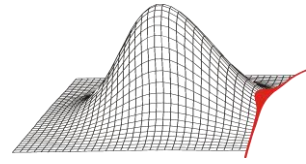
Approximationsfunktion mit Polynomen zweiter Ordnung:

$$y_i = c_0 + c_1 b_{1,i} + c_2 b_{2,i} + c_{11} b_{1,i}^2 + c_{22} b_{2,i}^2 + c_{12} b_{1,i} b_{2,i} + \epsilon.$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{BC} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n_{sim}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{1,1} & b_{2,1} & b_{1,1}^2 & b_{2,1}^2 & b_{1,1}b_{2,1} \\ 1 & b_{1,2} & b_{2,2} & b_{1,2}^2 & b_{2,2}^2 & b_{1,2}b_{2,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b_{1,i} & b_{2,i} & b_{1,i}^2 & b_{2,i}^2 & b_{1,i}b_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b_{1,n_{sim}} & b_{2,n_{sim}} & b_{1,n_{sim}}^2 & b_{2,n_{sim}}^2 & b_{1,n_{sim}}b_{2,n_{sim}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_{11} \\ c_{22} \\ c_{12} \end{bmatrix}$$

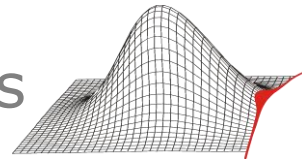
$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_{n_{sim}} \end{bmatrix}$$



[4,5,6]

$$S_E = (\mathbf{y} - \mathbf{B}\mathbf{C})^T (\mathbf{y} - \mathbf{B}\mathbf{C}) = \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} \longrightarrow \min$$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{y}$$



Bestimmtheitsmaß: $R^2 = \frac{S_R}{S_y}$ [4,5,6]

Summe der Abweichungsquadrate:

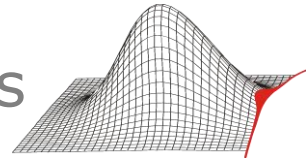
$$S_R = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{y} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n_{sim}} y_i \right)^2}{n_{sim}}$$

Totale Summe der Abweichungsquadrate:

$$S_y = S_R + S_E$$

Summe der Quadrate der Approximationsfehler:

$$S_E = \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{y}$$

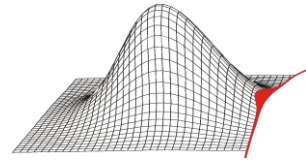


Das Bestimmtheitsmaß R^2 beschreibt den Anteil der Varianz von $\mathbf{y}$, der durch die Eingangsgrößen $\mathbf{b}$ erklärt wird. [4,5,6]

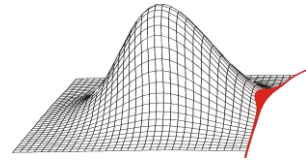
$$R = |r_{\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}}|$$

korrigiertes Bestimmtheitsmaß:

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{\frac{S_E}{n_{sim} - n_{koe}}}{\frac{S_y}{n_{sim} - 1}} = 1 - \left(\frac{n_{sim} - 1}{n_{sim} - n_{koe}} \right) (1 - R^2)$$



- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- Probabilistische Methoden
- **Mögliche Ergebnisse von probabilistischen Untersuchungen**
- Mögliche Fehlerquellen bei probabilistischen Untersuchungen
- Zusammenfassung



Notwendige Anzahl der deterministischen Rechnungen:

MCS: SRS $n_{sim} \approx \frac{100}{\tilde{P}_f}$ LHS, DS $n_{sim} \approx \frac{10}{\tilde{P}_f}$

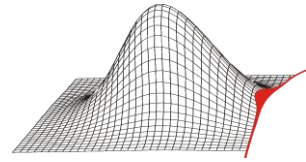
- RSM:**
- Stark abhängig von der Variablenanzahl
 - Größer bei unbekannter Lage der Versagensfunktion
 - Betrachtung jeweils nur einer Ergebnisgröße möglich

Importance Sampling:

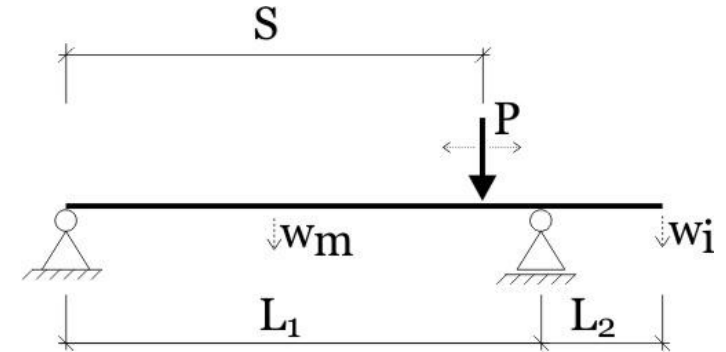
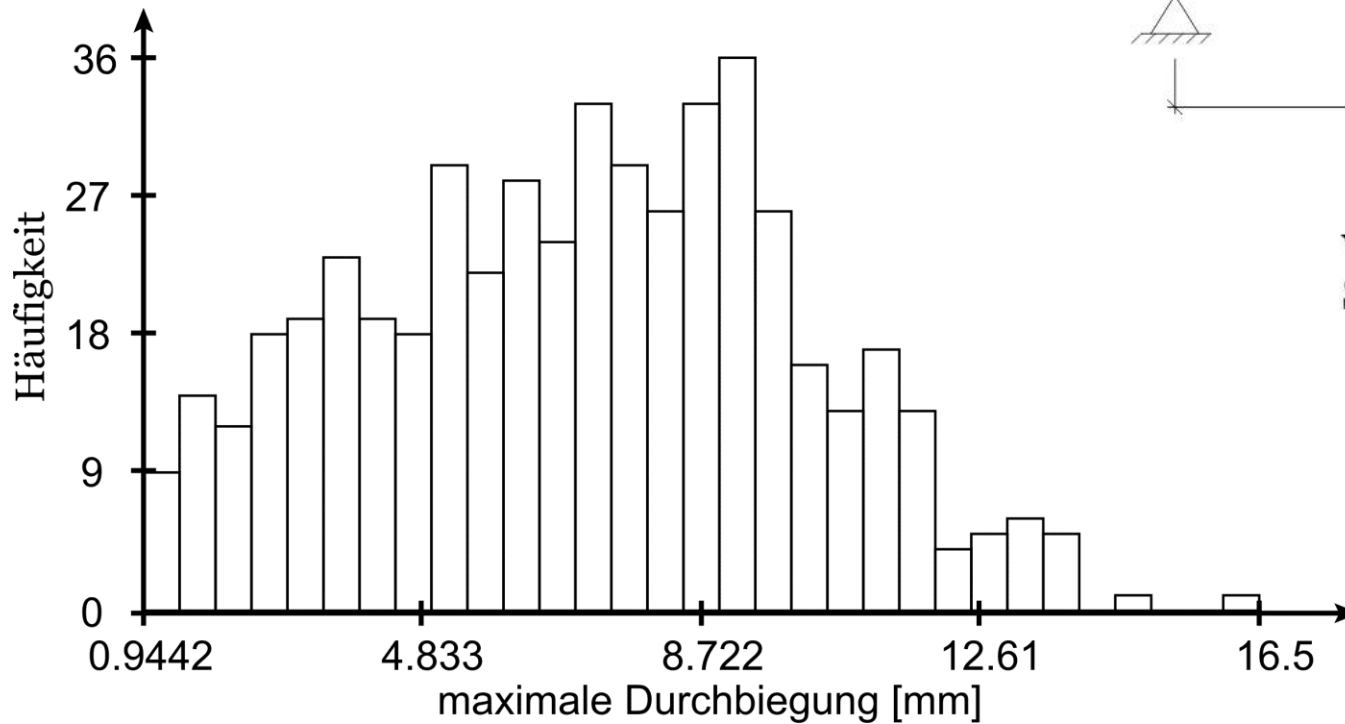
- Größer bei unbekannter Lage der Versagensfunktion
- Betrachtung jeweils nur einer Ergebnisgröße möglich

Zuverlässigkeitsverfahren:

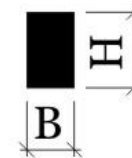
- Betrachtung jeweils nur einer Ergebnisgröße möglich
- Numerische Probleme bei stark nichtlinearen Versagensfunktionen

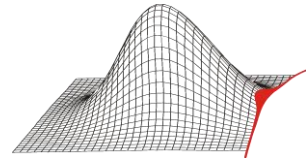


Histogramm



vergrößerte
Seitenansicht





Monte-Carlo-Simulation



Für jede deterministische Rechnung innerhalb der MCS: Auslesen der Ergebnisgröße an allen Knoten des FE-Modells.



Statistische Auswertung aller Werte

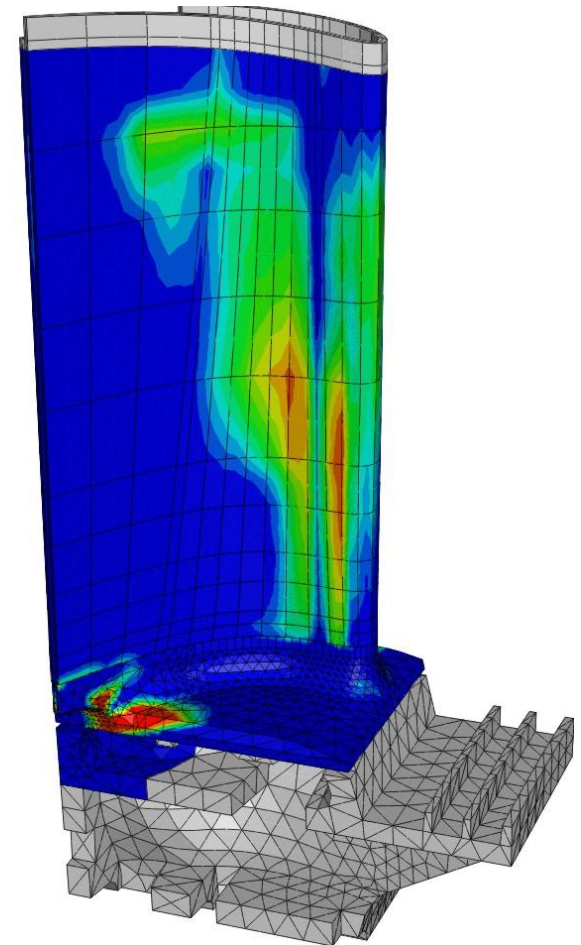
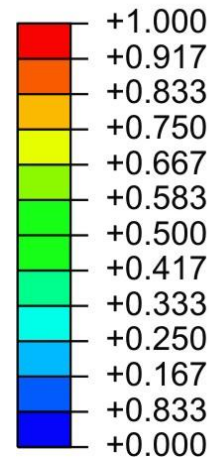


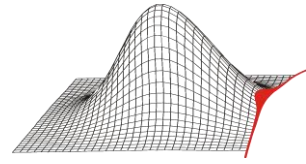
Hinzufügen der statistischen Ergebnisse zu einer Datenbank



Graphische Auswertung im 3D-Viewer

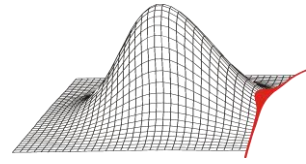
Farbkontur: Relative Häufigkeit einer speziellen Zyklenzahl



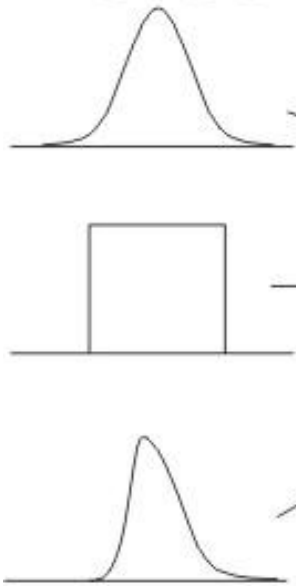


[12]

- Ingenieurmäßige (deterministische) Maße:
 - Überschreiten von Grenzwerten
 - Auftreten von unerwünschten plötzlichen Änderungen der Ergebnisgrößen (z.B. lokales Maximum der Ergebnisgröße)
 - Ansprechen von Systeminstabilitäten (z.B.: Beulen)
- Statistische Maße
 - Lage der Mittelwerte der Ergebnisgrößen
 - Größe der Variationskoeffizienten der Ergebnisgrößen

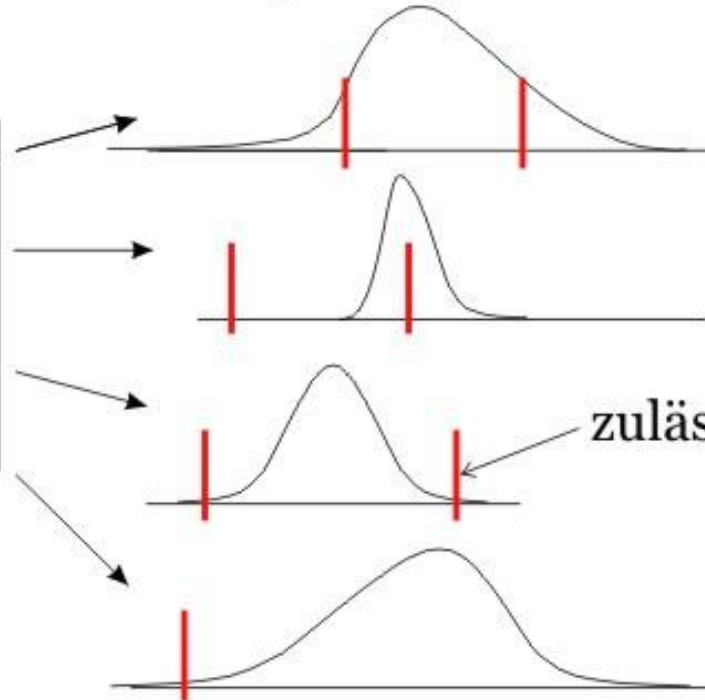


Eingangsgrößen

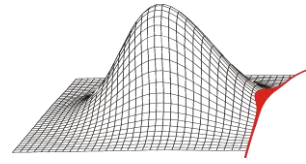


determinis-
tisches
Modell

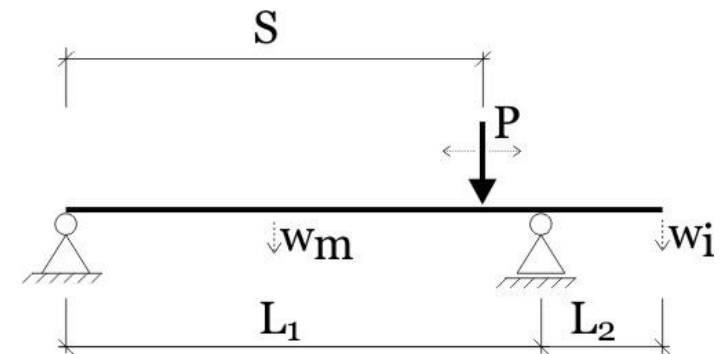
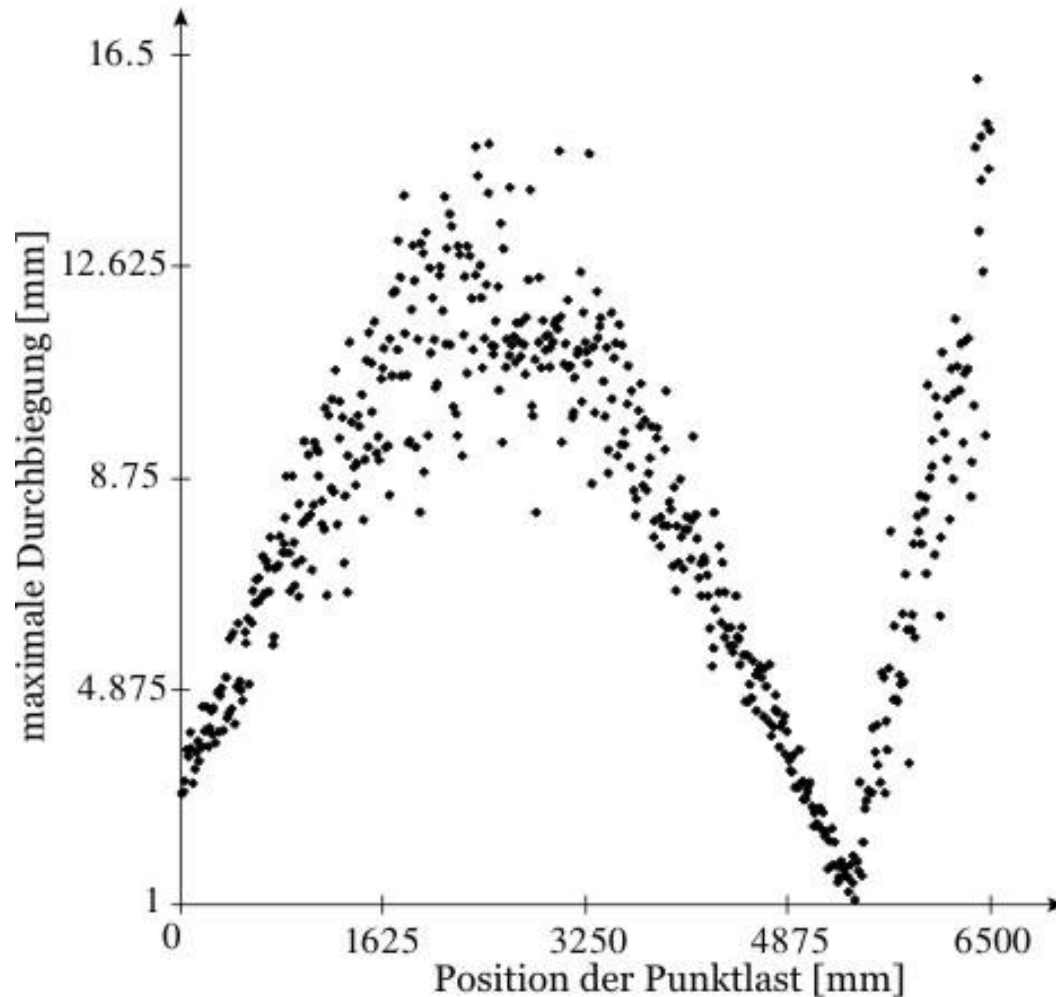
Ergebnisgrößen



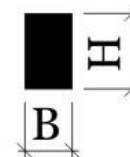
zulässige Streubreite

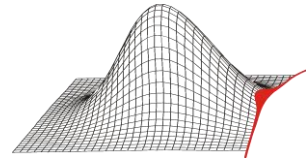


Verzweigungssystem

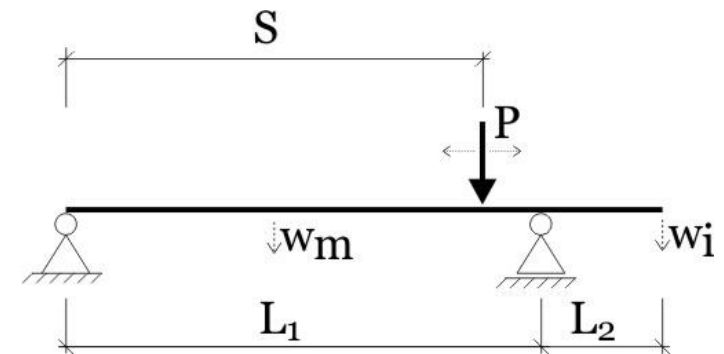
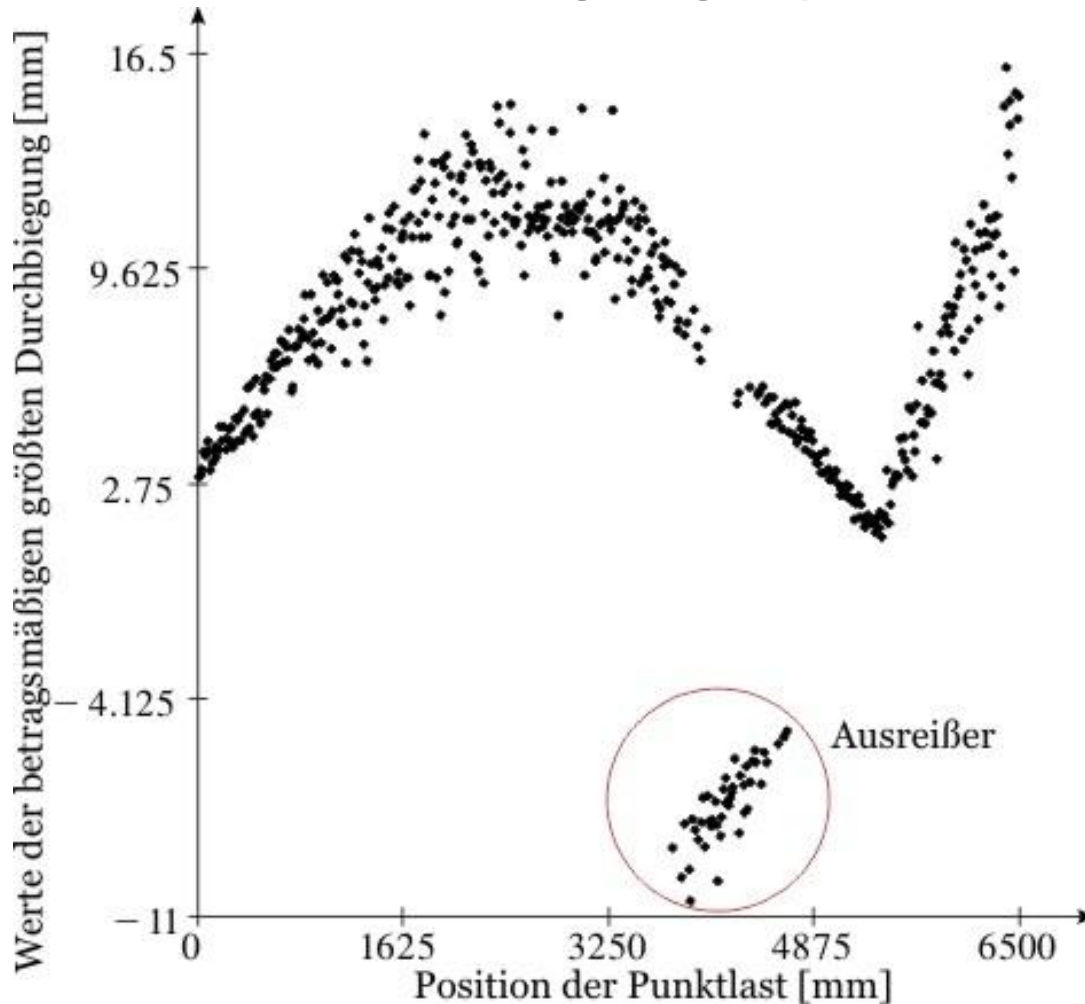


vergrößerte
Seitenansicht

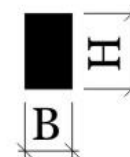


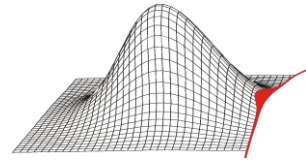


Verzweigungssystem mit Ausreißern



vergrößerte
Seitenansicht





Notwendige Anzahl der det. Rechnungen bei einer MCS:

Überschreiten von Grenzwerten, Auftreten von unerwünschten plötzlichen Änderungen der Ergebnisgrößen, Ansprechen von Systeminstabilitäten:

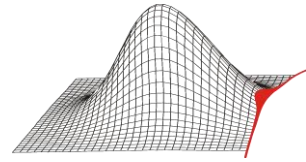
- Abhängig von der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

Lage der Mittelwerte der Ergebnisgrößen:

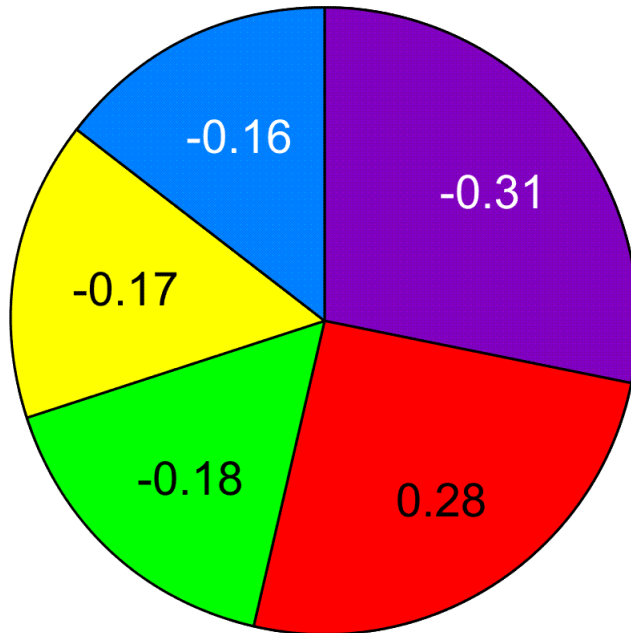
- $\approx 30 \dots 50$

Größe der Variationskoeffizienten der Ergebnisgrößen:

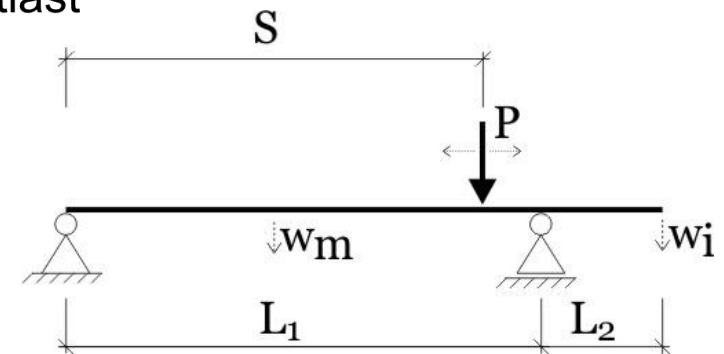
- $\approx 50 \dots 100$



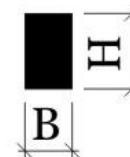
Target-Variable: max. w

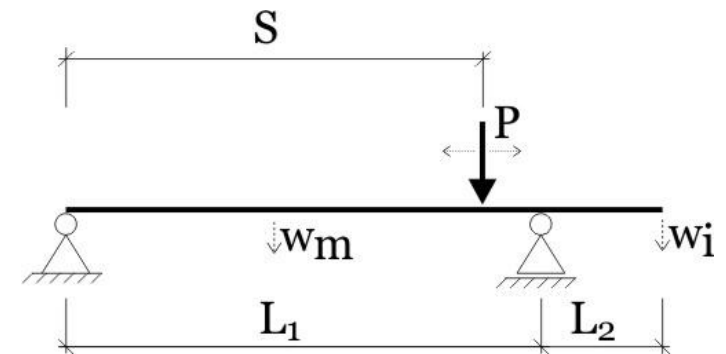
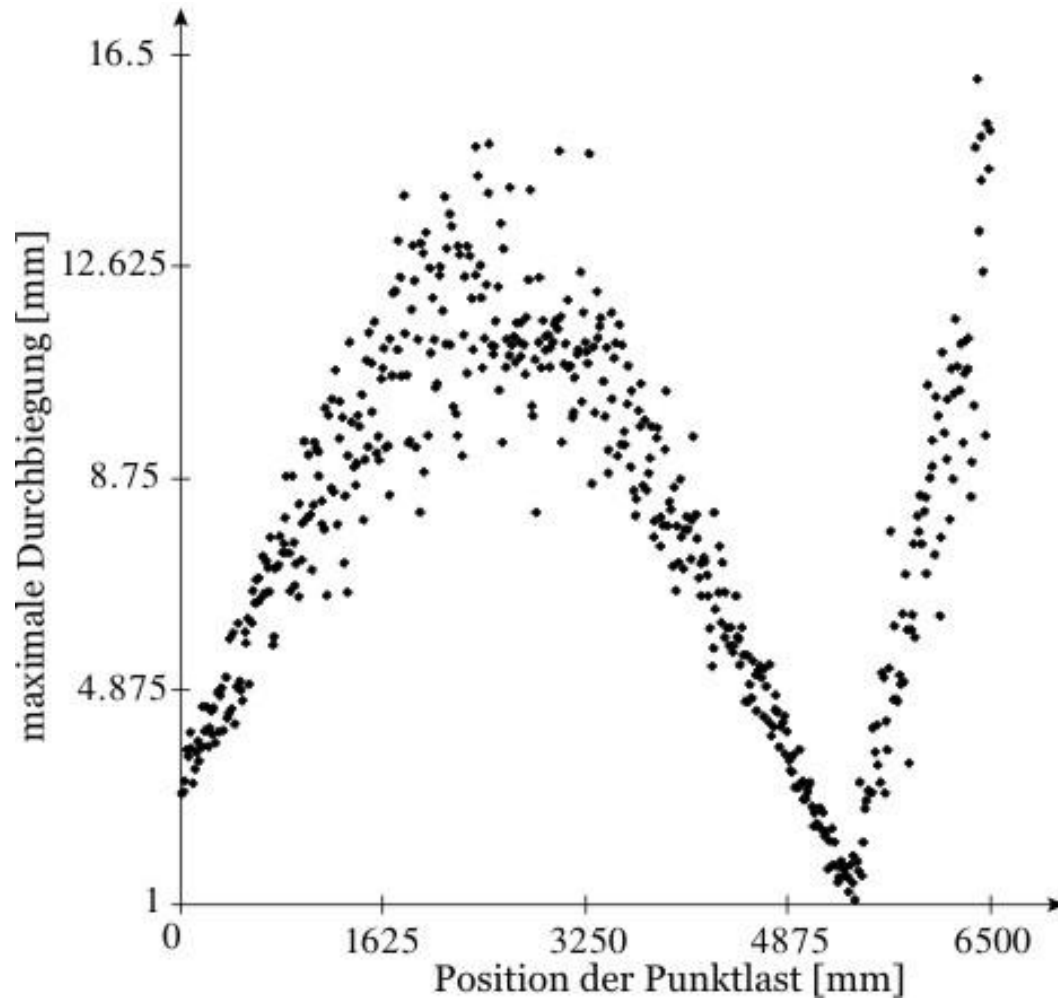
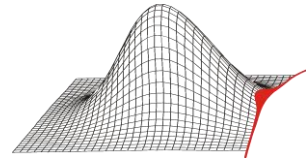


- Höhe
- Punktlast
- Position der Punktlast
- E-Modul
- Breite

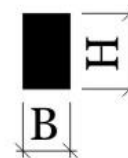


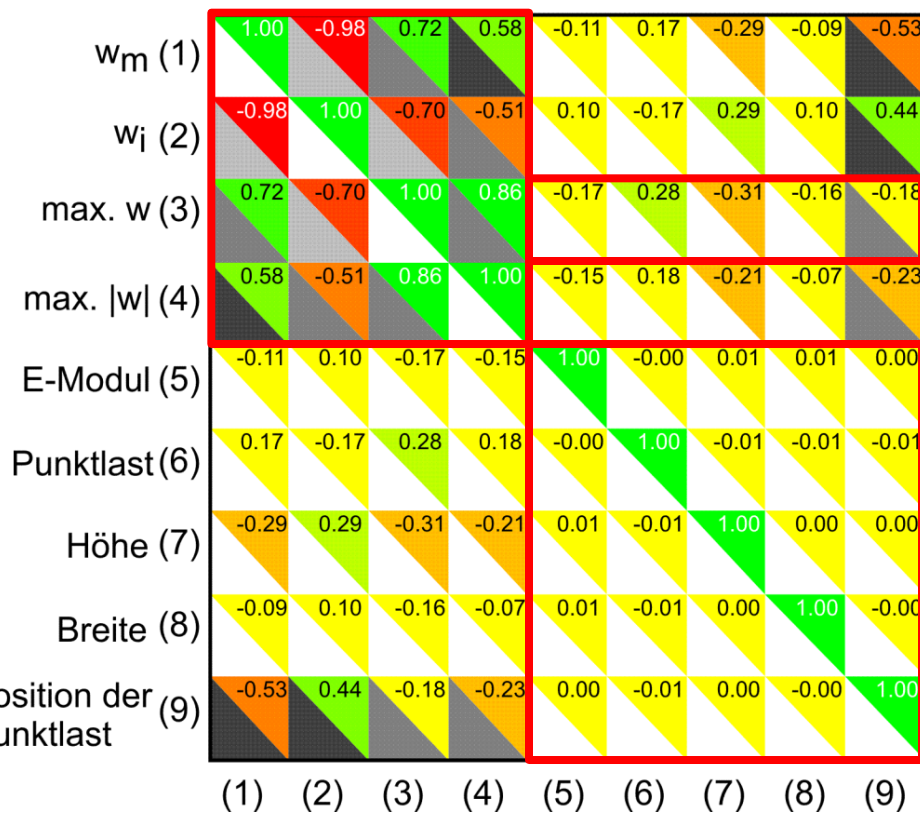
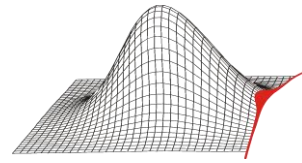
vergrößerte
Seitenansicht



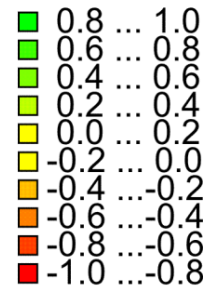


vergrößerte
Seitenansicht

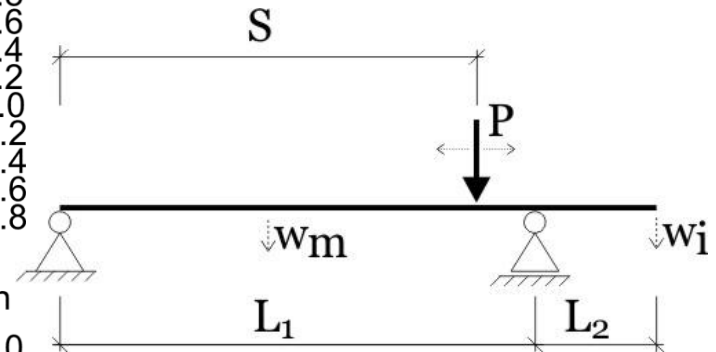
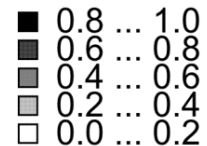




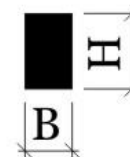
Spearman

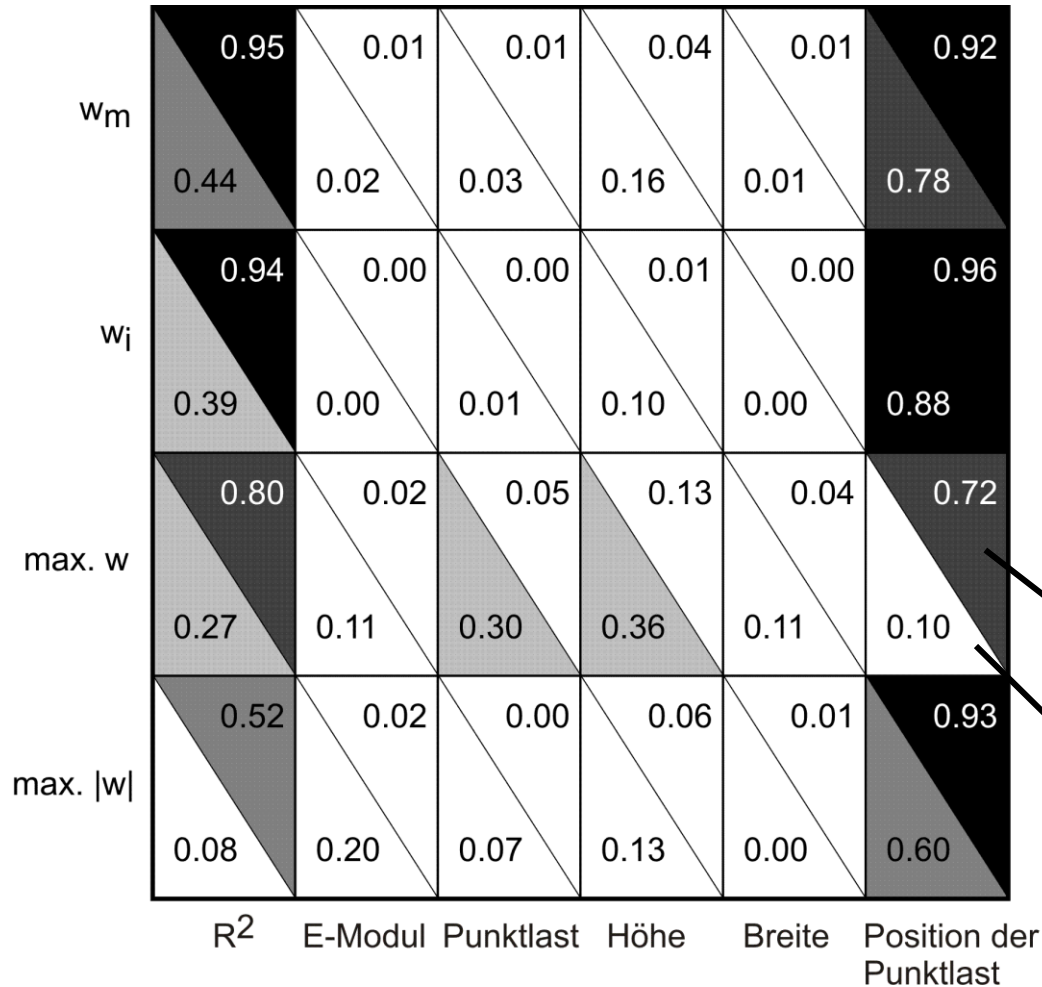
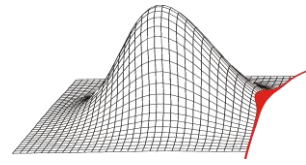


Nonlinear
Correlation



vergrößerte
Seitenansicht





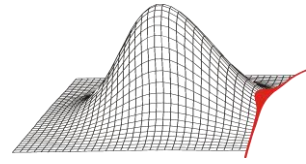
Coefficient
 ■ 0.8 ... 1.0
 ■ 0.6 ... 0.8
 ■ 0.4 ... 0.6
 ■ 0.2 ... 0.4
 □ 0.0 ... 0.2

[15]

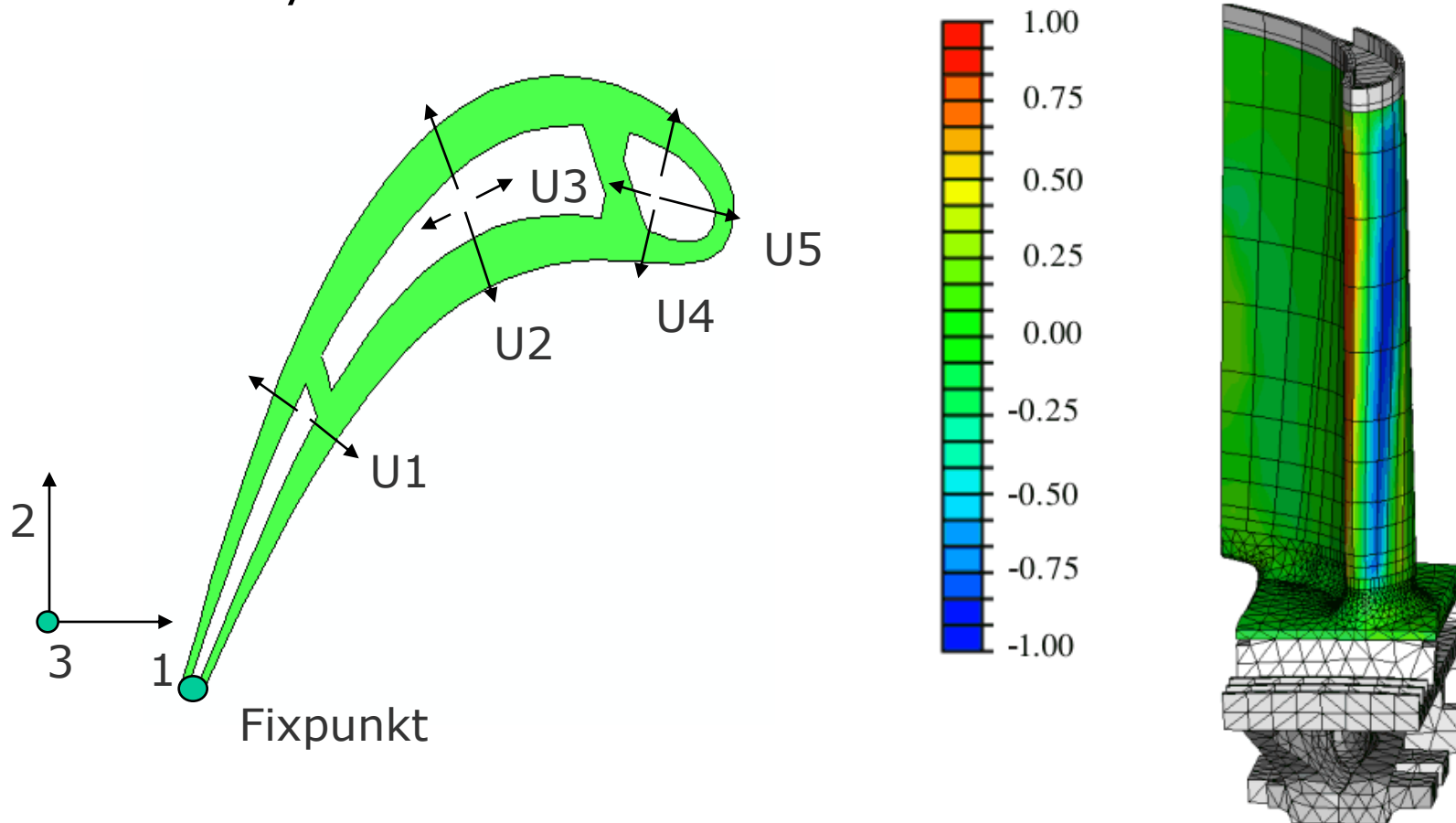
$$COI_e = 1 - \frac{R_e^2}{R^2}$$

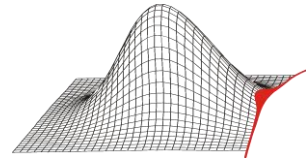
Antwortfläche dritter Ordnung

Antwortfläche erster Ordnung

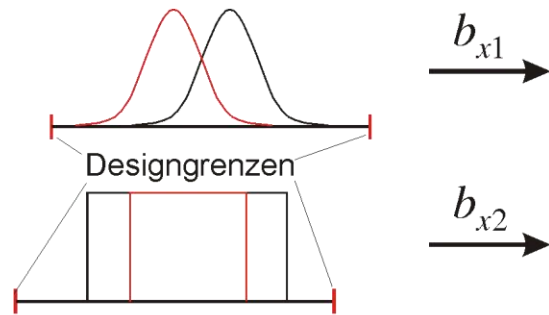


Farbkontur: Rangkorrelation zwischen der Kernverschiebung U4 und der Zyklenzahl

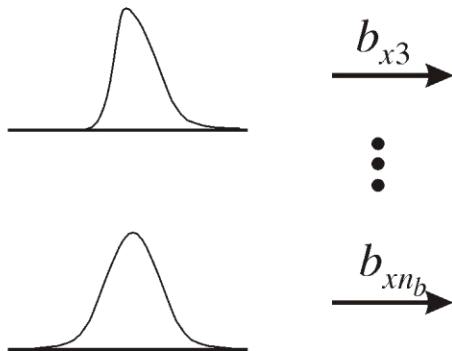




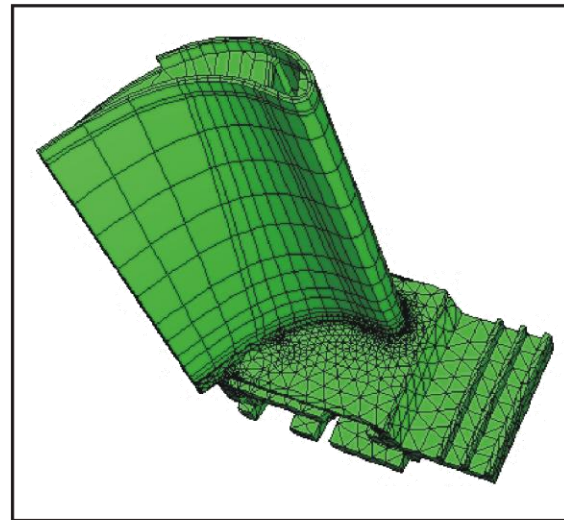
probabilistische Design-Eingangsgrößen



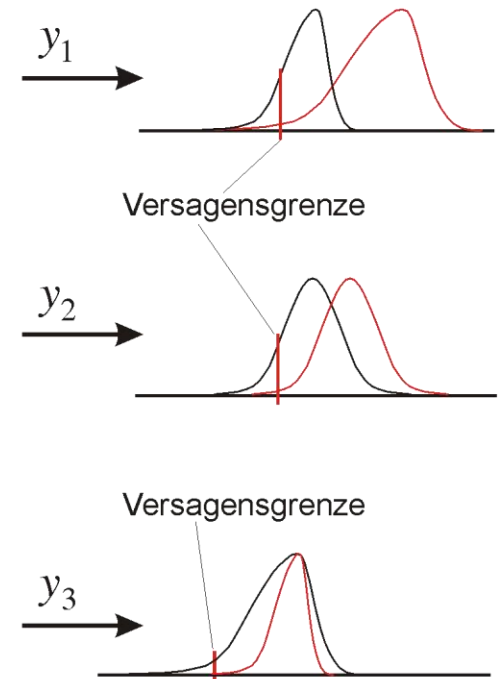
probabilistische Eingangsgrößen

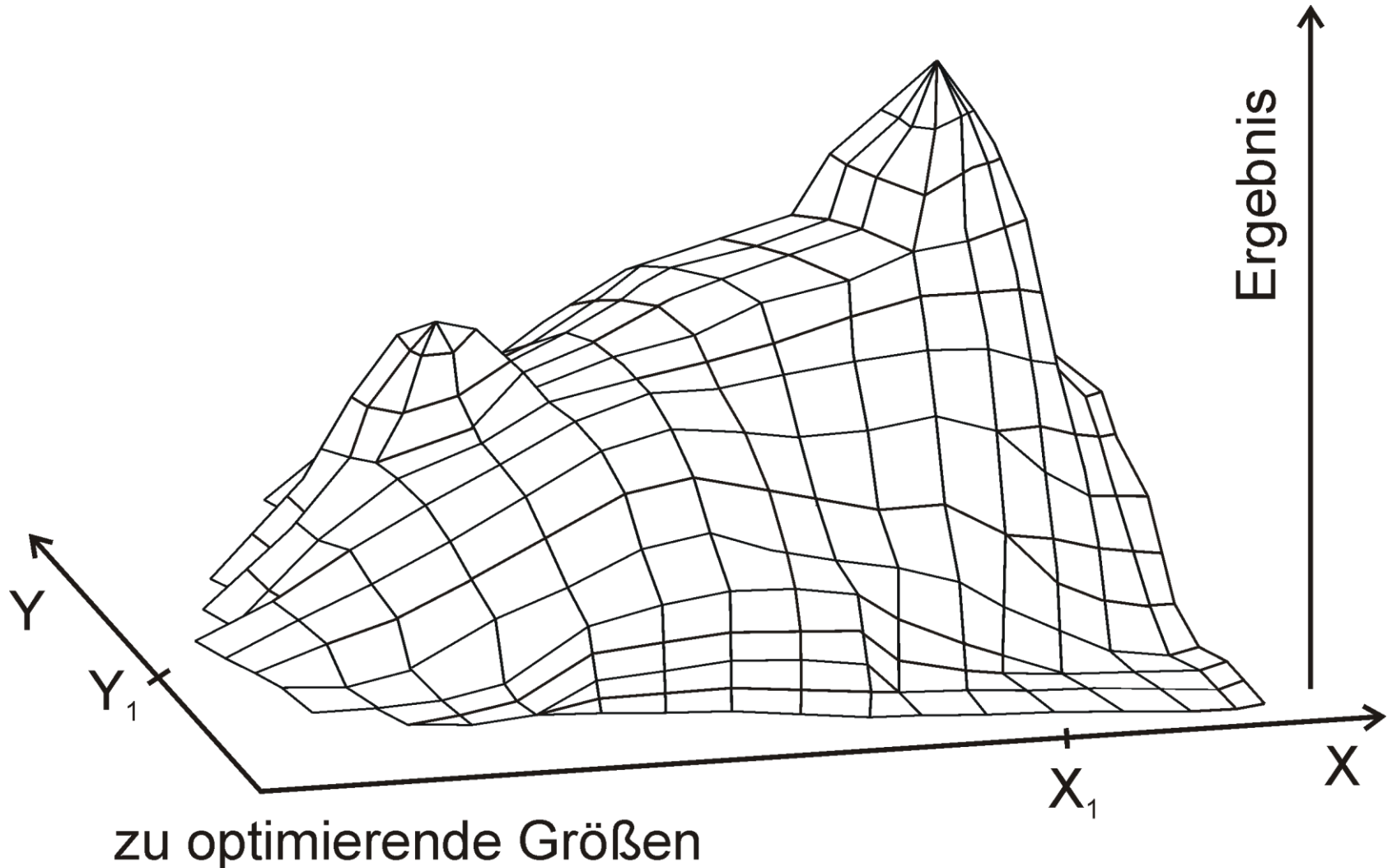
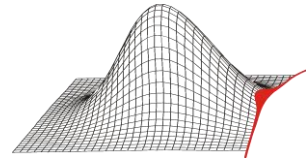


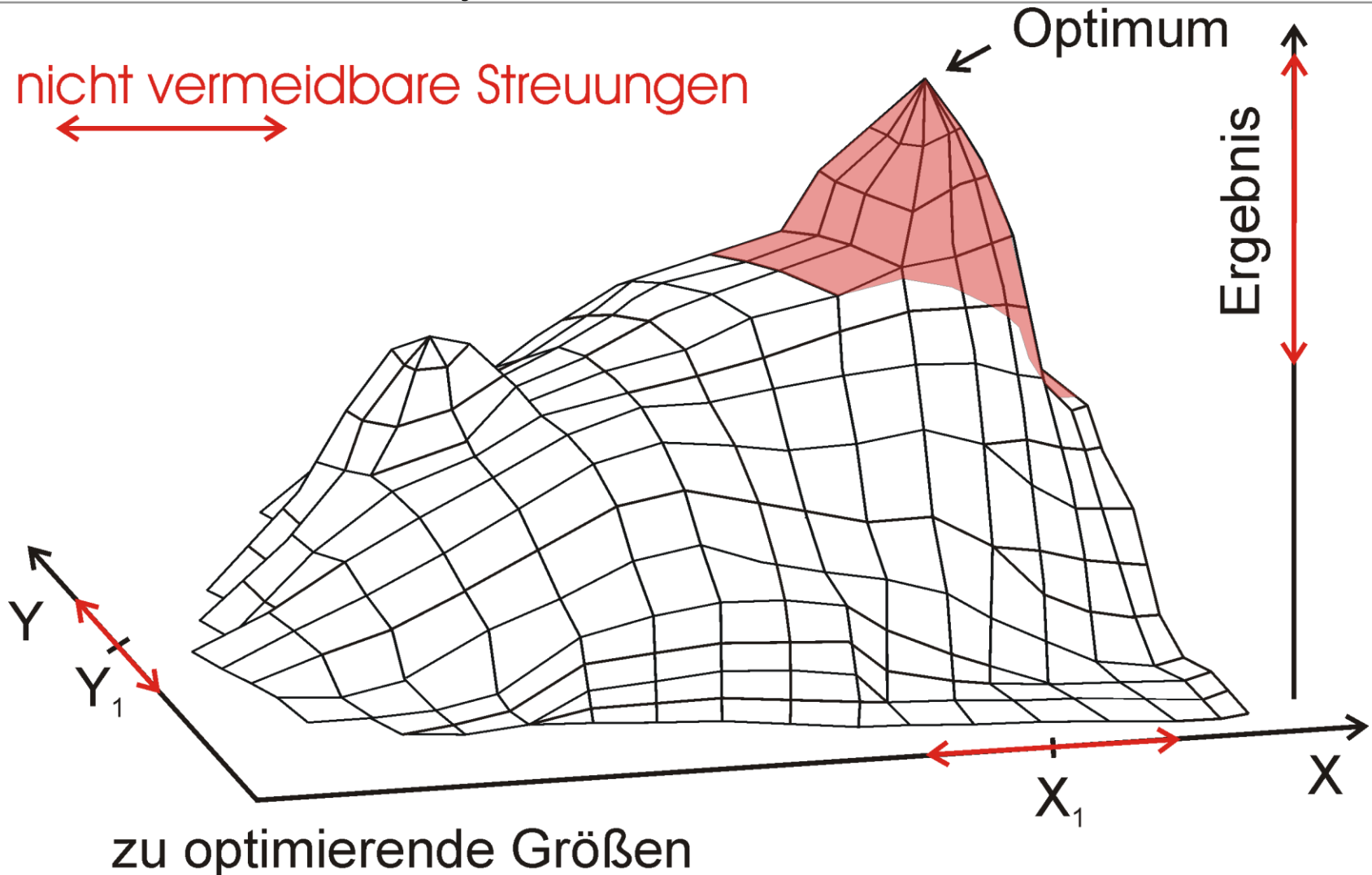
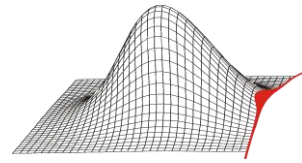
deterministisches Modell

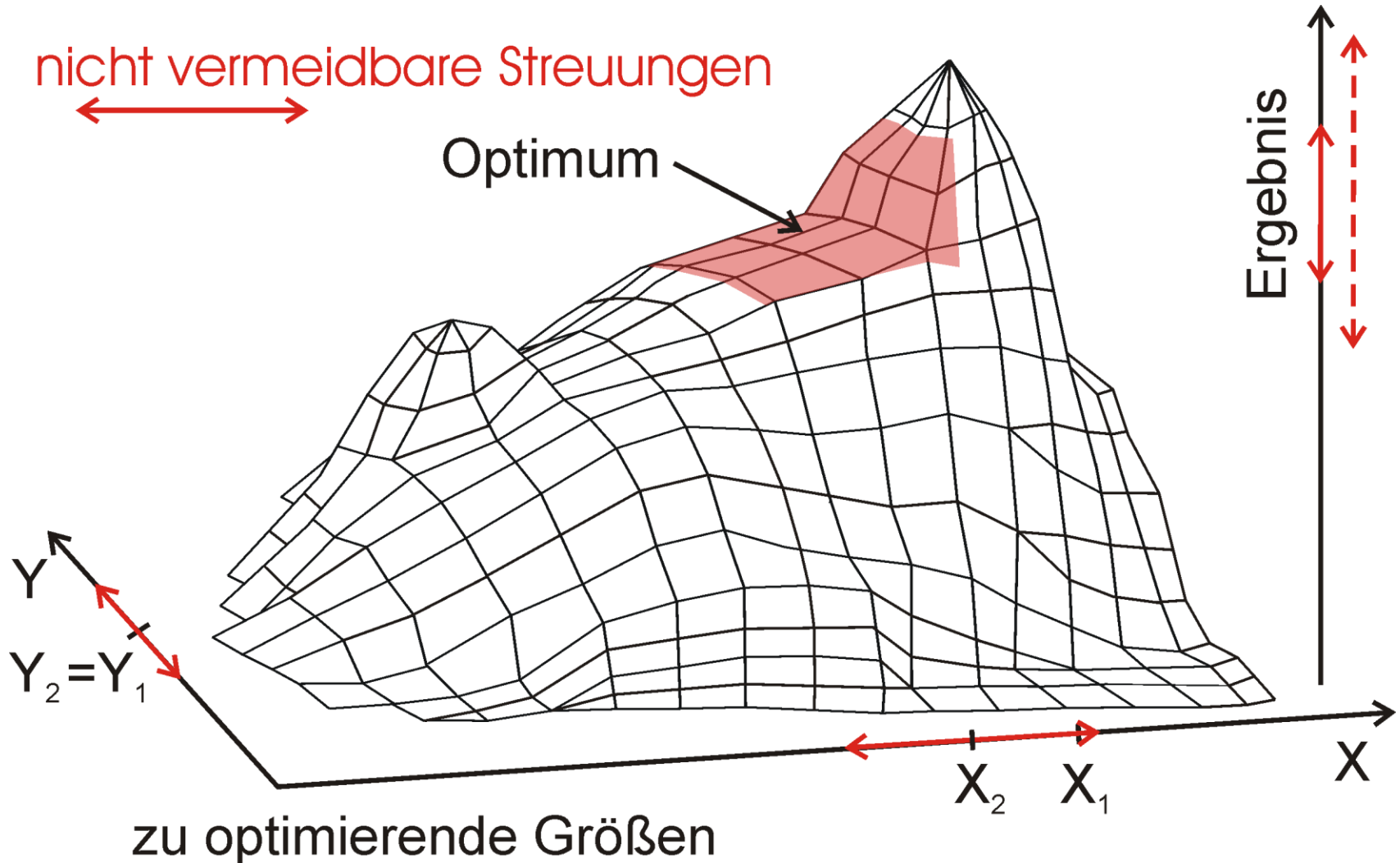
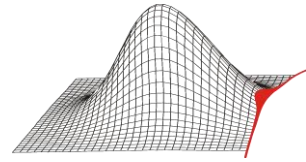


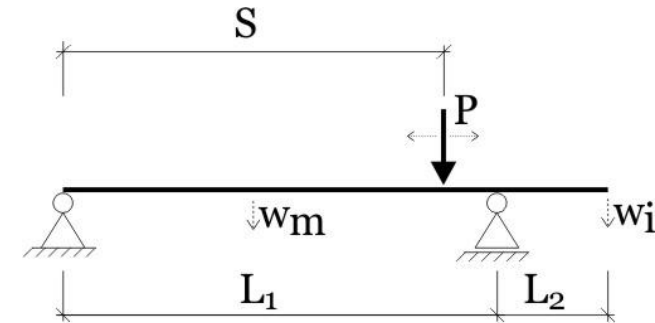
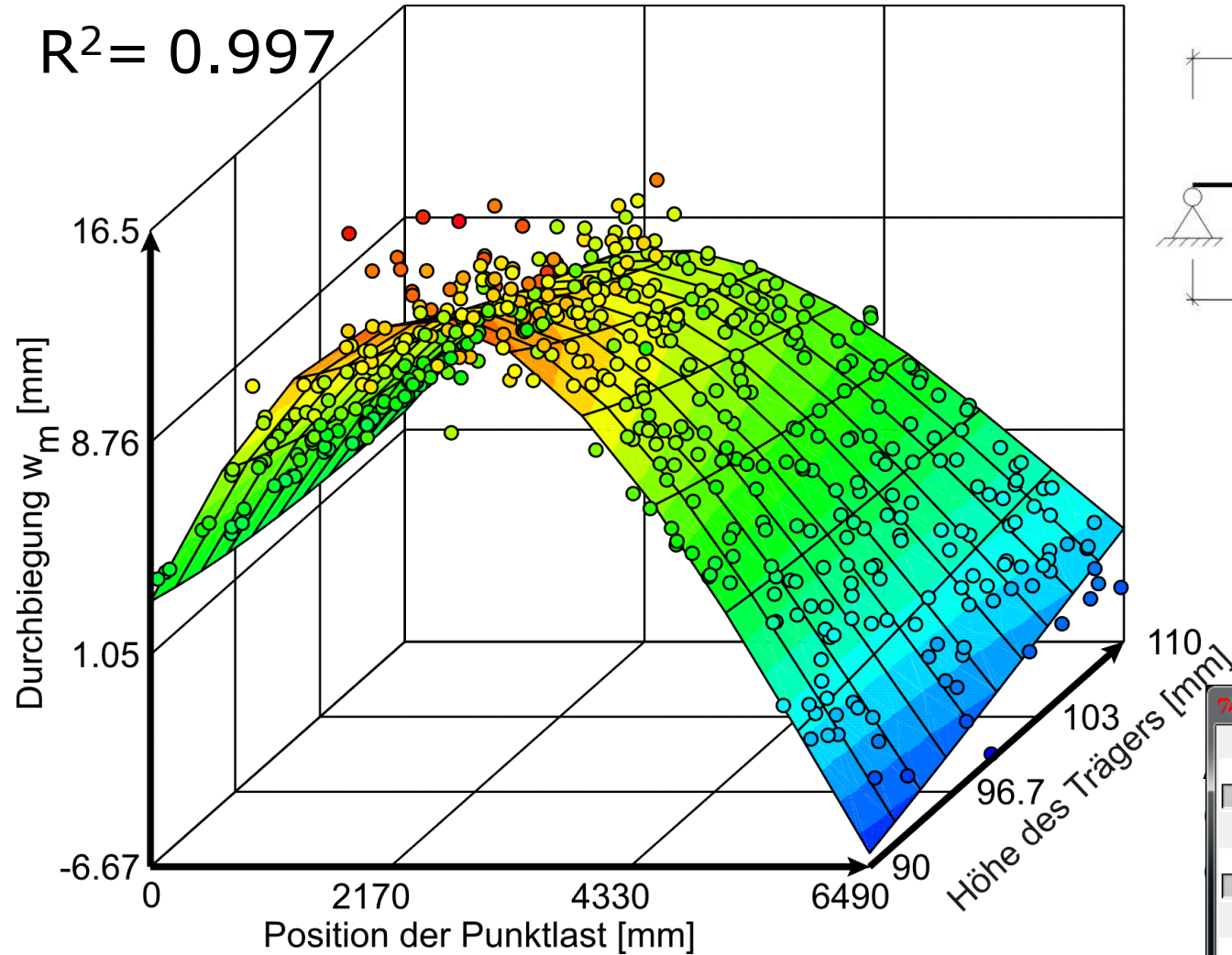
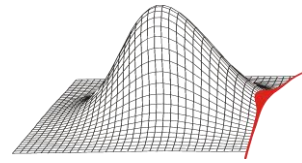
Beispiele für das Verhalten der Ergebnisgrößen



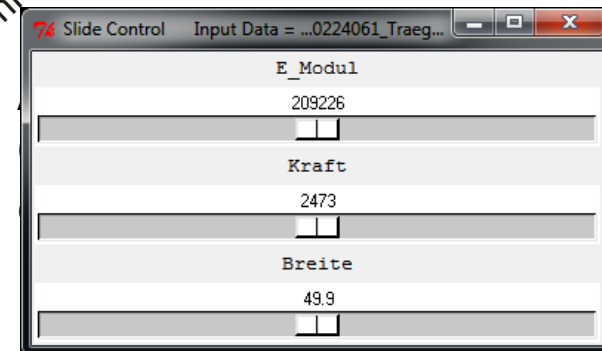
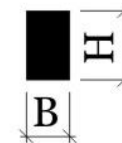


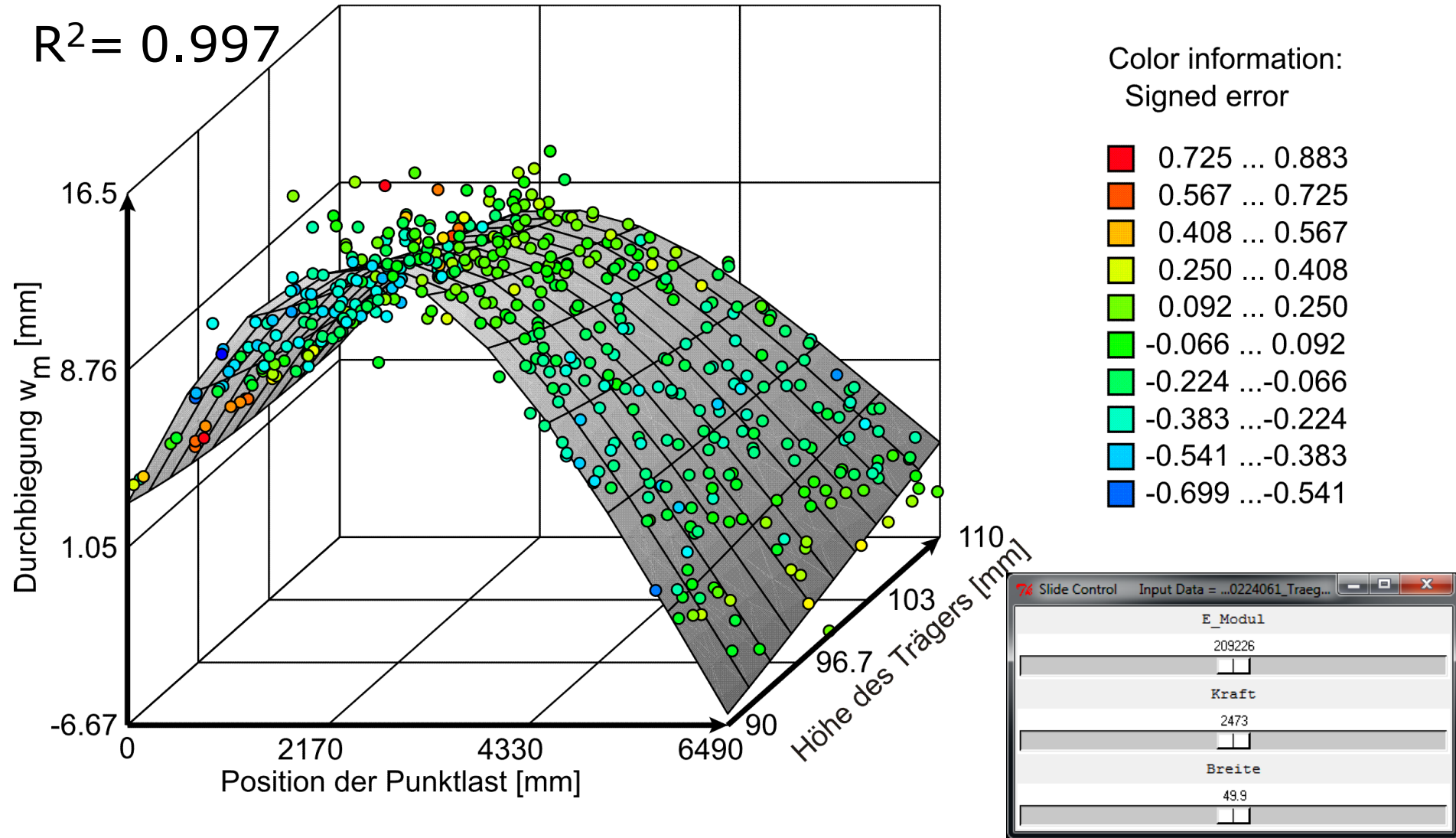
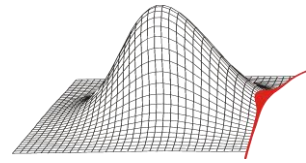


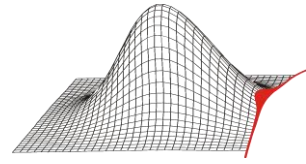




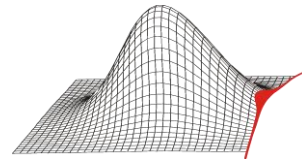
vergrößerte
Seitenansicht







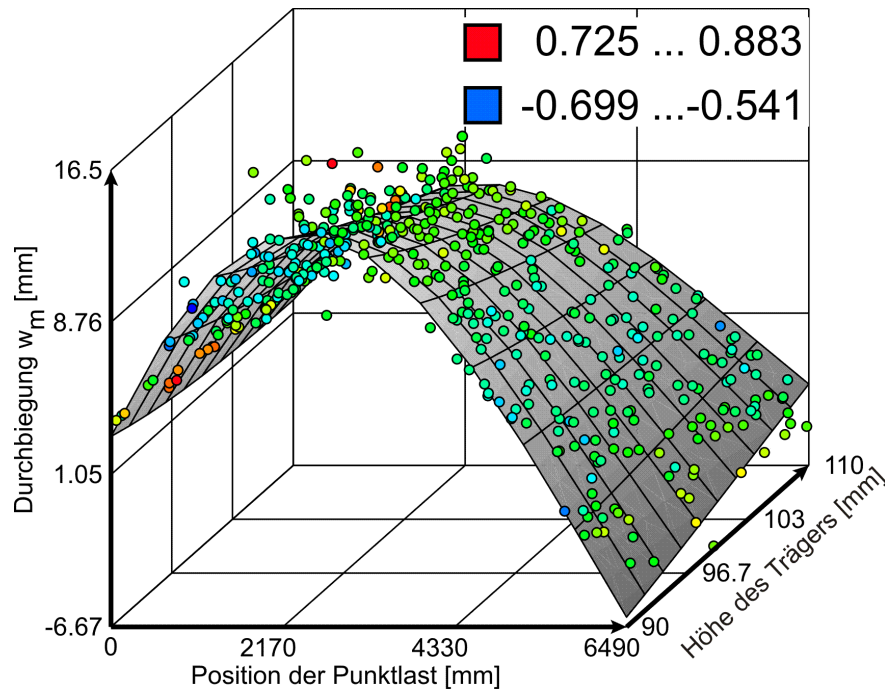
- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- Probabilistische Methoden
- Mögliche Ergebnisse von probabilistischen Untersuchungen
- **Mögliche Fehlerquellen bei probabilistischen Untersuchungen**
- Zusammenfassung



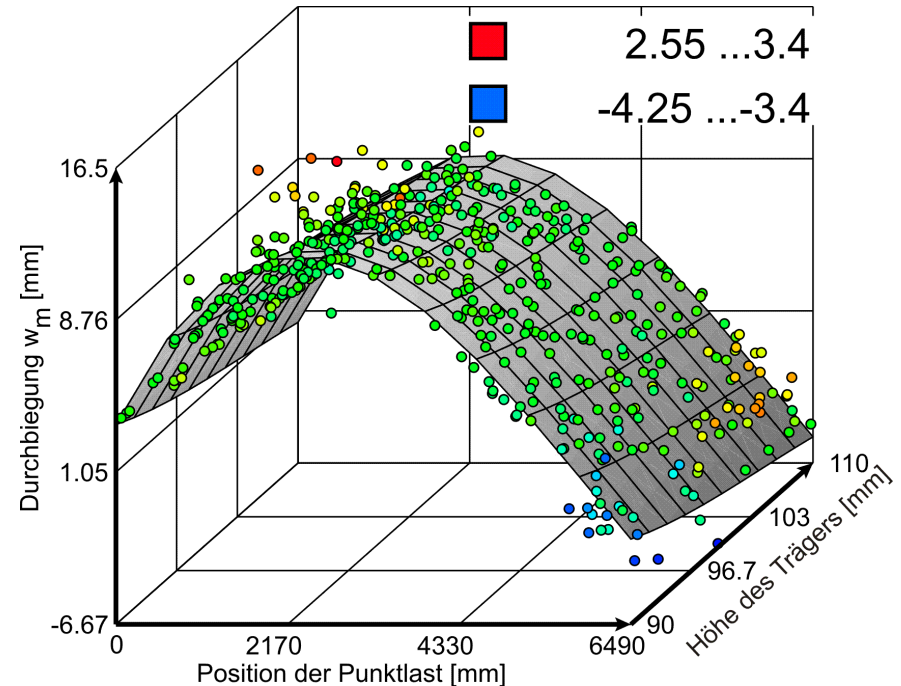
$$R^2 = 0.997$$

$$n_{\text{sim}} = 500$$

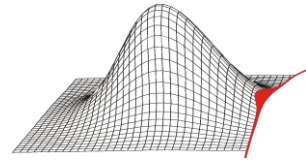
$$R^2 = 0.923$$



Antwortfläche dritter Ordnung mit
gemischten Termen und
Box-Cox-Transformation



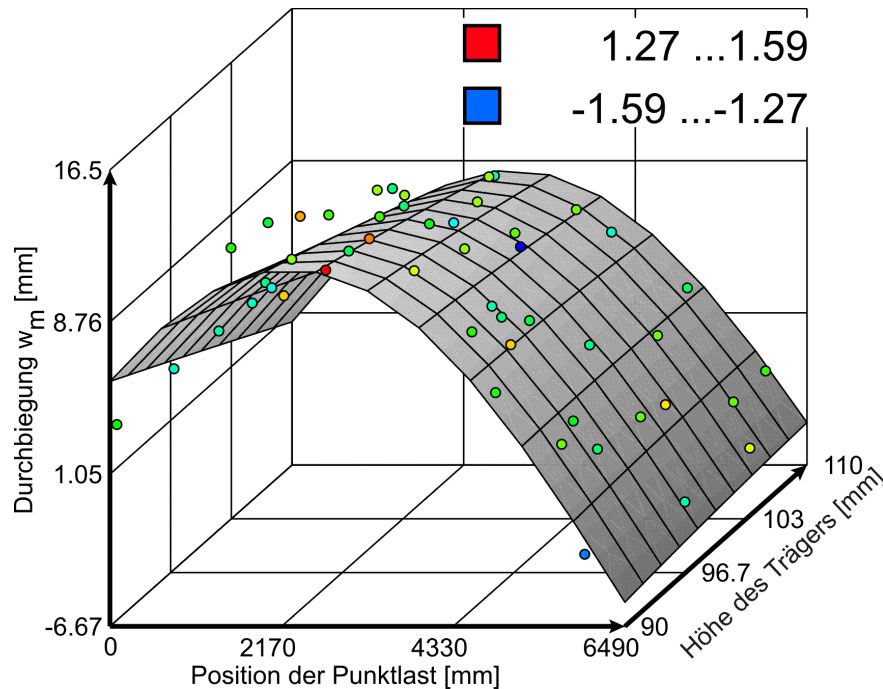
Antwortfläche zweiter Ordnung
ohne gemischten Terme



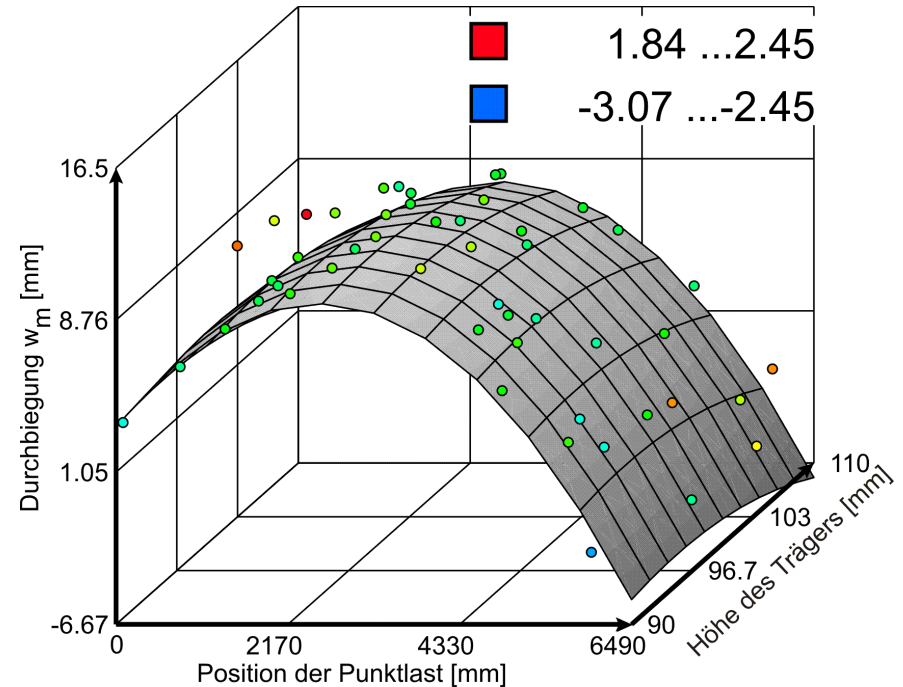
$R^2 = 0.980$

$n_{\text{sim}} = 50$

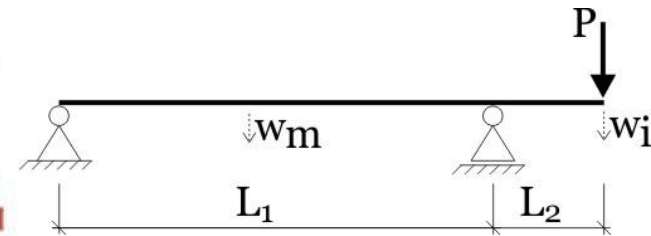
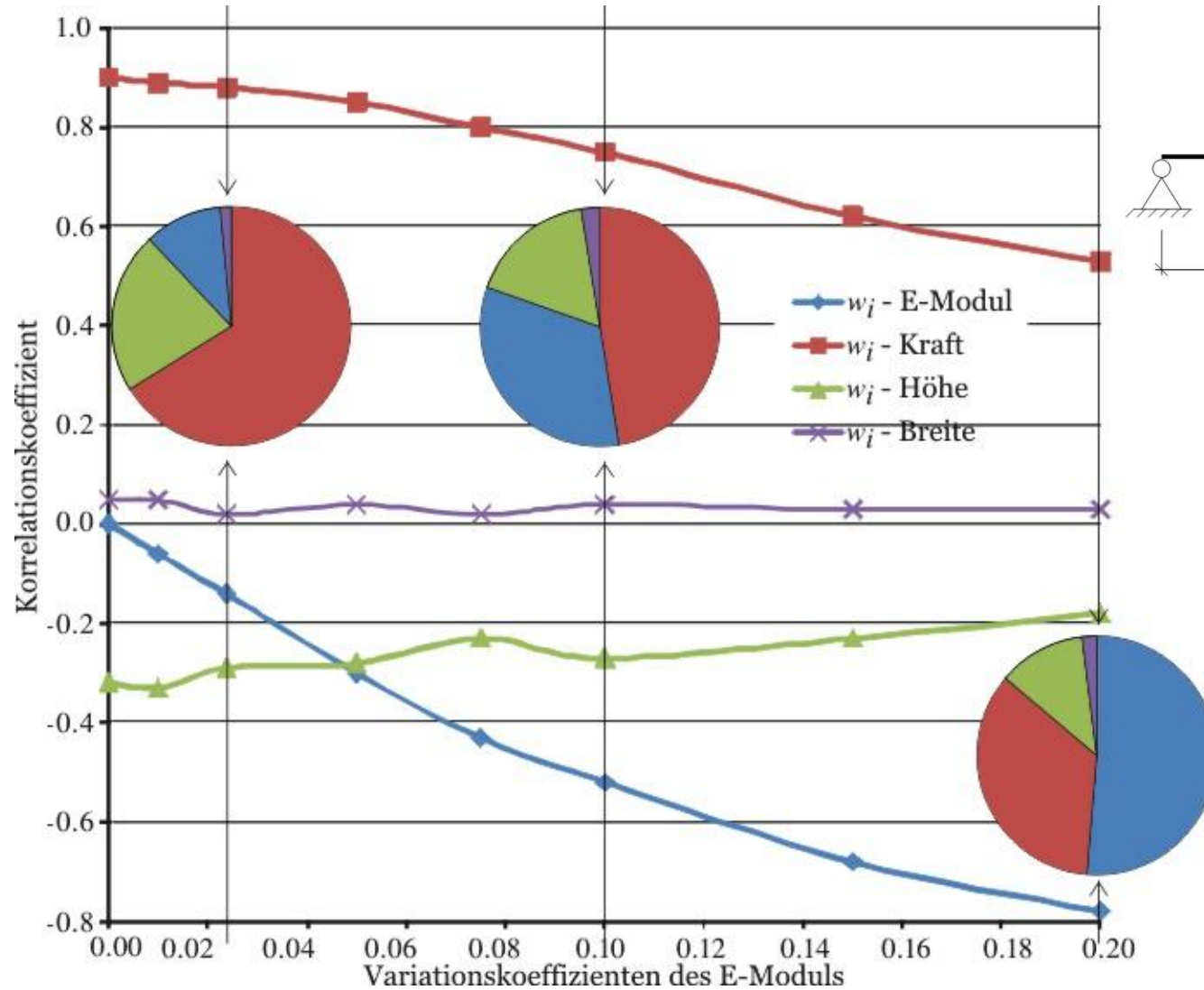
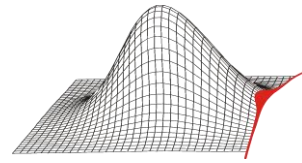
$R^2 = 0.943$



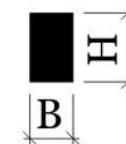
Antwortfläche zweiter Ordnung
mit gemischten Termen und
Box-Cox-Transformation

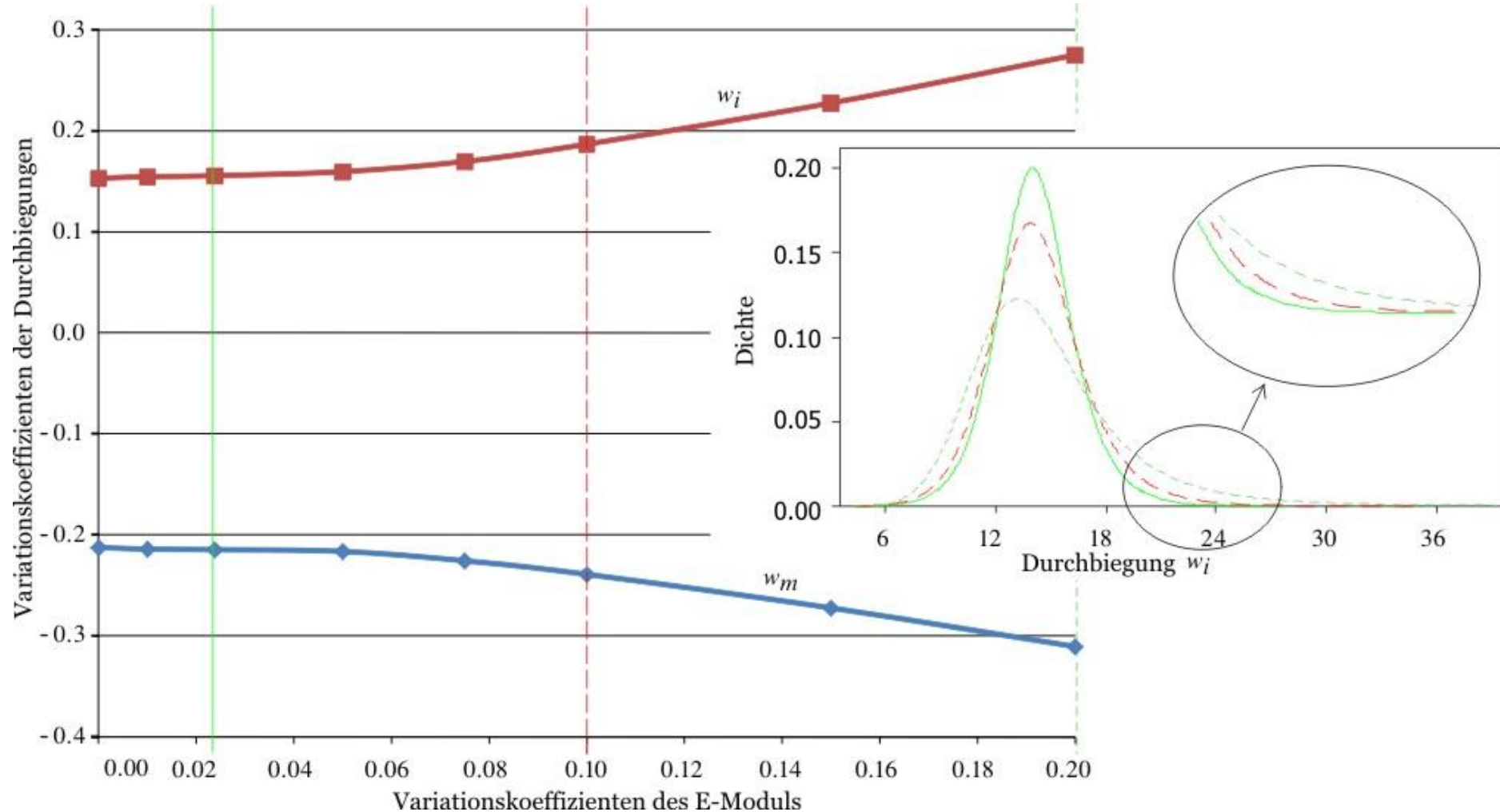
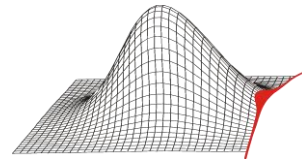


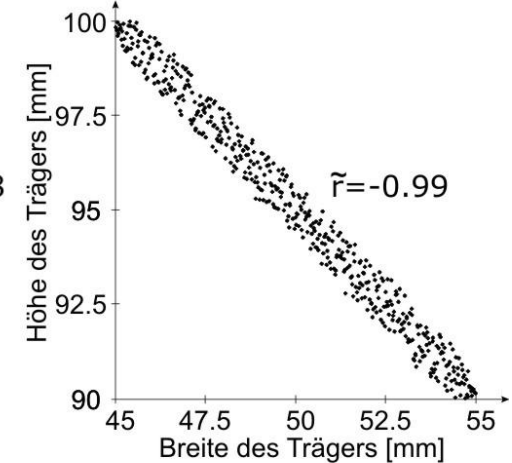
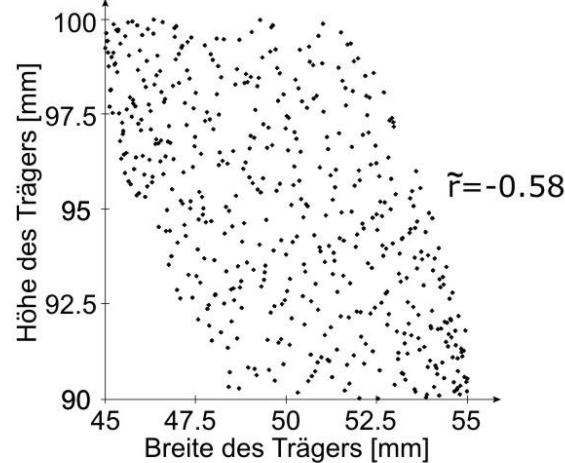
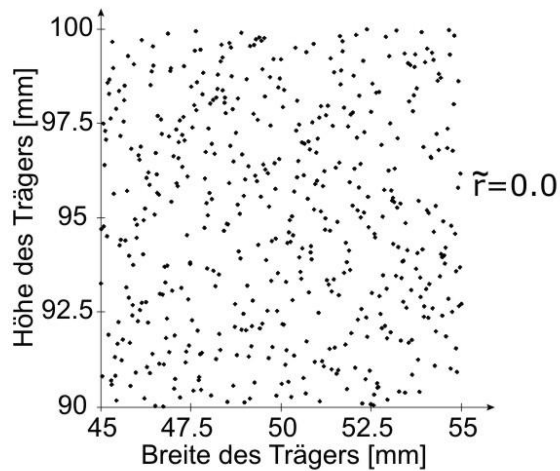
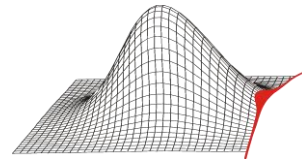
Antwortfläche zweiter Ordnung
ohne gemischten Terme



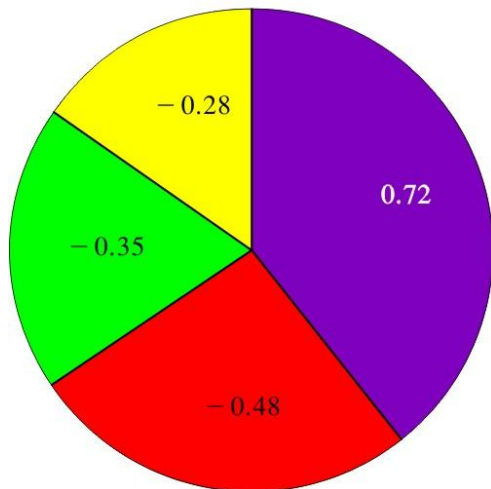
vergrößerte
Seitenansicht





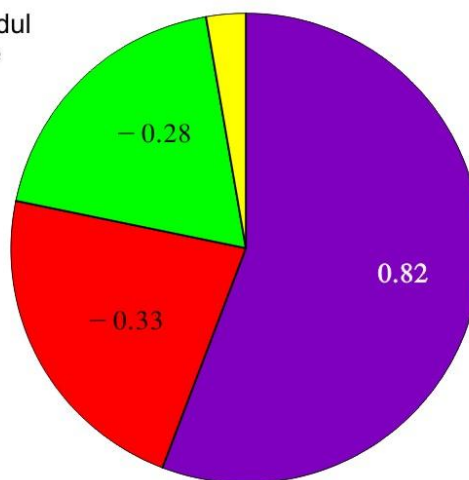


Target-Variable: w_i

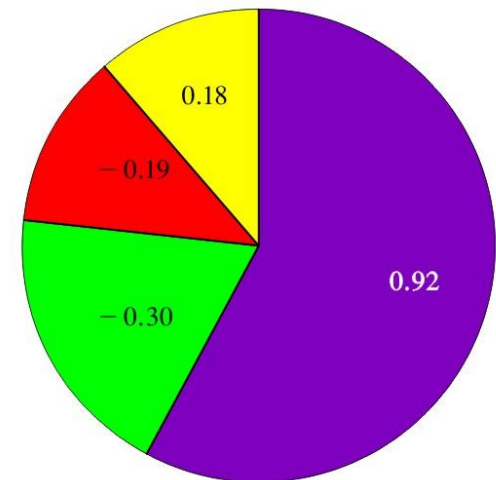


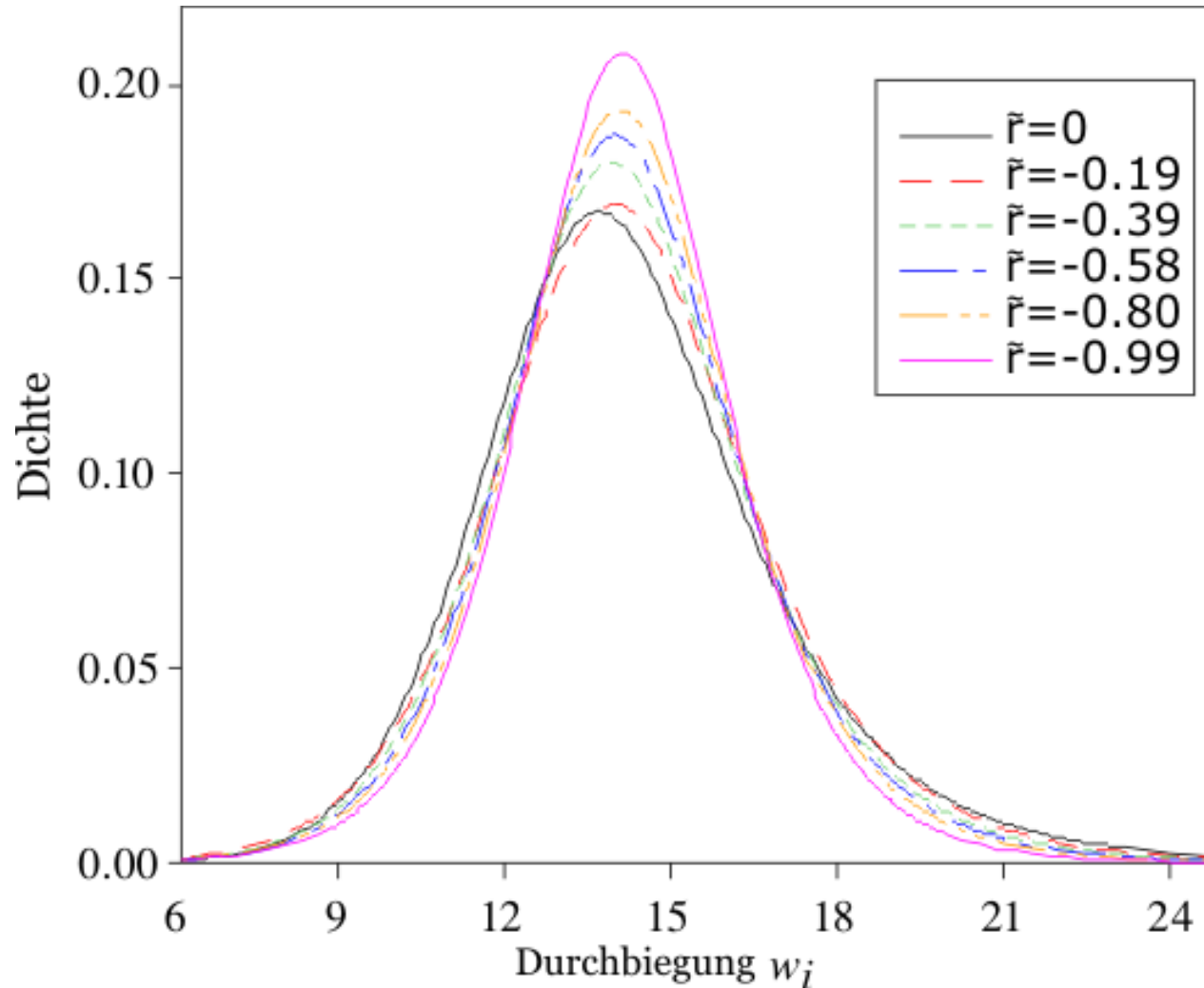
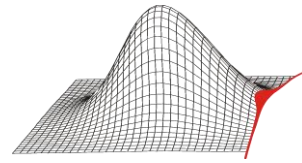
■ Kraft
■ Höhe
■ E-Modul
■ Breite

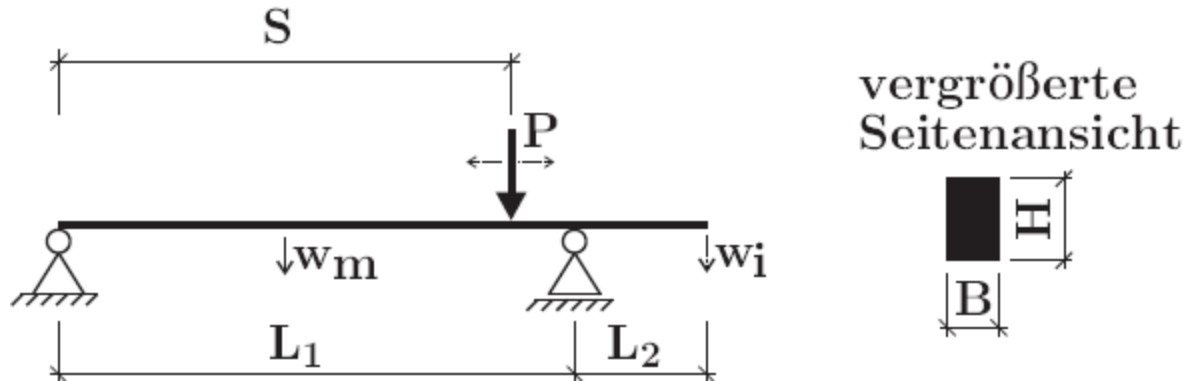
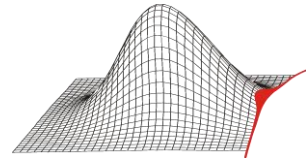
Target-Variable: w_i



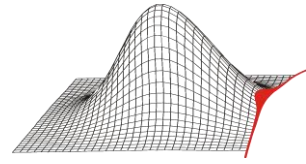
Target-Variable: w_i







Name	Verteilungsart	Verteilung
Höhe des Trägers (H)	gleich	$[95, 105][mm]$
Breite des Trägers (B)	gleich	$[45, 55][mm]$
E-Modul (E)	normal	$\mu = 210000 N/mm^2, \sigma = 10000 N/mm^2$
Punktlast (P)	normal	$\mu = 2500 N, \sigma = 300 N$
Position der Punktlast (S)	gleich	$[0, L_1 + L_2]$



Verformungen:

infolge Eigengewicht q :

$$w_m = \left(\frac{L_1^2}{2,4} - L_2^2 \right) \frac{qL_1^2}{32EI}$$

$$w_i = \left(\frac{L_2^3}{8} + \frac{L_2^2 L_1}{6} - \frac{L_1^3}{24} \right) \frac{qL_2}{EI}$$

infolge $P \left(S \leq \frac{L_1}{2} \right)$:

$$w_m = \left(\frac{L_1^2}{16} - \frac{S^2}{12} \right) \frac{PS}{EI}$$

$$w_i = -(L_1 + S) \frac{PSL_2(L_1 - S)}{6L_1EI}$$

infolge $P \left(S > \frac{L_1}{2} < L_1 \right)$:

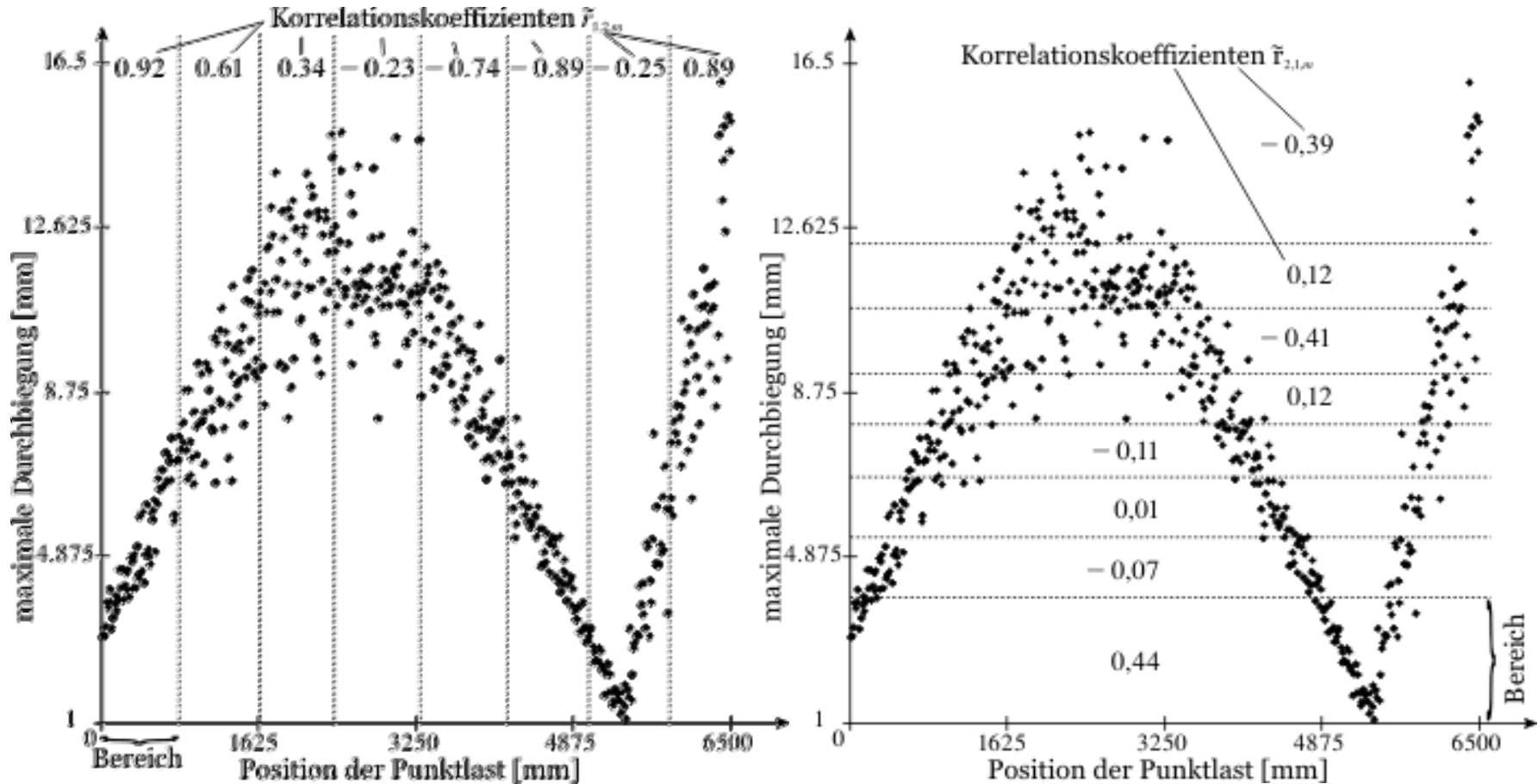
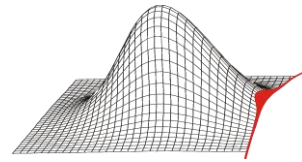
$$w_m = \left(\frac{L_1^2}{16} - \frac{(L_1 - S)^2}{12} \right) \frac{P(L_1 - S)}{EI}$$

$$w_i = -(L_1 + S) \frac{PSL_2(L_1 - S)}{6L_1EI}$$

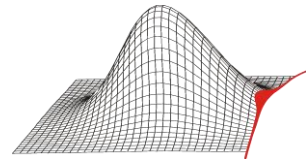
infolge $P (S > L_1)$:

$$w_m = \frac{PL_1^2(S - L_1)}{16EI}$$

$$w_i = \left(\frac{L_1 L_2}{2} + \frac{(S - L_1)L_2}{6} - \frac{(S - L_1)^2}{6} \right) \frac{P(S - L_1)}{EI}$$



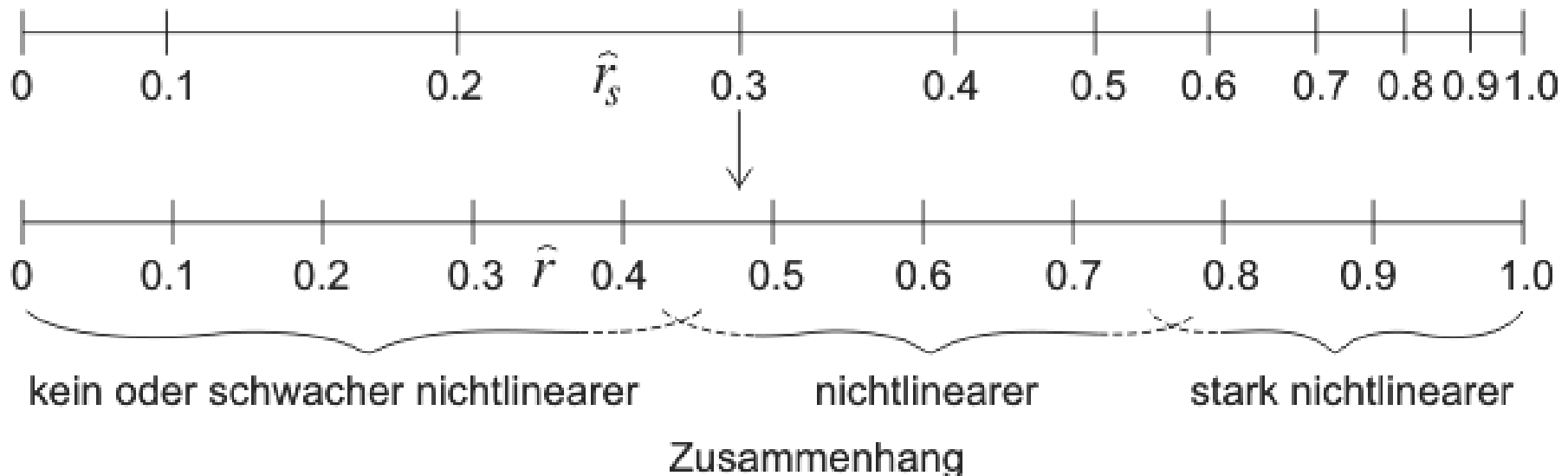
$$\hat{r}_s = \frac{1}{2 \cdot ii} \left(\sum_{m=1}^{ii} \left| \tilde{r}_{1,2} - \tilde{r}_{1,2,m} \right| + \sum_{m=1}^{ii} \left| \tilde{r}_{2,1} - \tilde{r}_{2,1,m} \right| \right)$$

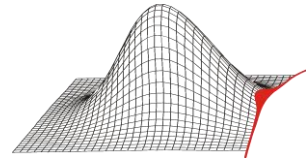


$$\hat{r}_s = \frac{1}{2 \cdot ii} \left(\sum_{m=1}^{ii} \left| \tilde{r}_{1,2} - \tilde{r}_{1,2,m} \right| + \sum_{m=1}^{ii} \left| \tilde{r}_{2,1} - \tilde{r}_{2,1,m} \right| \right)$$

empirisch ermittelten Transformationsfunktion:

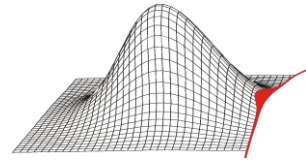
$$\hat{r} = 20 * \hat{r}_s^6 - 69.6 * \hat{r}_s^5 + 94.4 * \hat{r}_s^4 - 61.8 * \hat{r}_s^3 + 18.4 * \hat{r}_s^2 - 0.4 * \hat{r}_s$$





Restricted-Pairing

- Iterativer Algorithmus, mit welchem sich beliebige Korrelationsstrukturen zwischen Zufallsvektoren erstellen lassen
- Startbedingung:
 - Datenmatrix b_r vom Typ (n_b, n_{sim})
 - Zielkorrelationsmatrix T (Rangkorrelation) vom Typ (n_b, n_b)
- Algorithmus:
 - Beseitigen der perfekten Korrelation infolge LHS bzw. DS
 - Berechnung der Korrelationsmatrix C (Rangkorrelationen zwischen den Spalten b_{ri})
 - Berechnen der unteren Dreiecksmatrix Q aus $QQ^T = C$
 - Berechnen der Matrix P mit $PP^T = T$
 - Berechnen von S aus dem Gleichungssystem $S=PQ^{-1}$
 - Berechnen von R , so dass $R = b_r S^T$ ist
 - Umsortieren von b_r aufgrund der Rangfolge der Werte von R



Restricted-Pairing

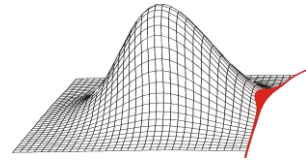
- Problem: Zielkorrelationsmatrix:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & -0.9 \\ 0.9 & -0.9 & 1 \end{pmatrix}$$

- T muss eine positiv semidefinite Matrix
- Automatische Anpassung (z.B.: iSight FD, ProSi)

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0.28 & 0.28 \\ 0.28 & 1 & -0.28 \\ 0.28 & -0.28 & 1 \end{pmatrix}$$

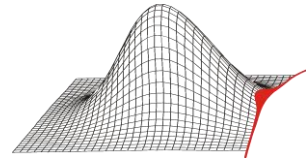
- Problem: Alle Korrelationen werden „gleichmäßig“ angepasst.



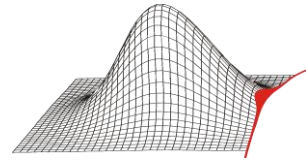
Restricted-Pairing

- Problem: Zielkorrelationsmatrix:
 - Manuelle Anpassung der Korrelationsmatrix (ProSi)
 - Ausgangspunkt Einheitsmatrix $I = T_{(0)}$ vom Typ (n_b, n_b)
 - Anpassung Korrelationspaarweise ($t_{jk} = t_{kj}$) ausgehend von der „wichtigsten“ Eingangsgrößenkombination
 - ProSi berechnet die Intervallgrenzen der einzelnen Korrelationspaare, so das die Matrix noch positiv semidefinit ist

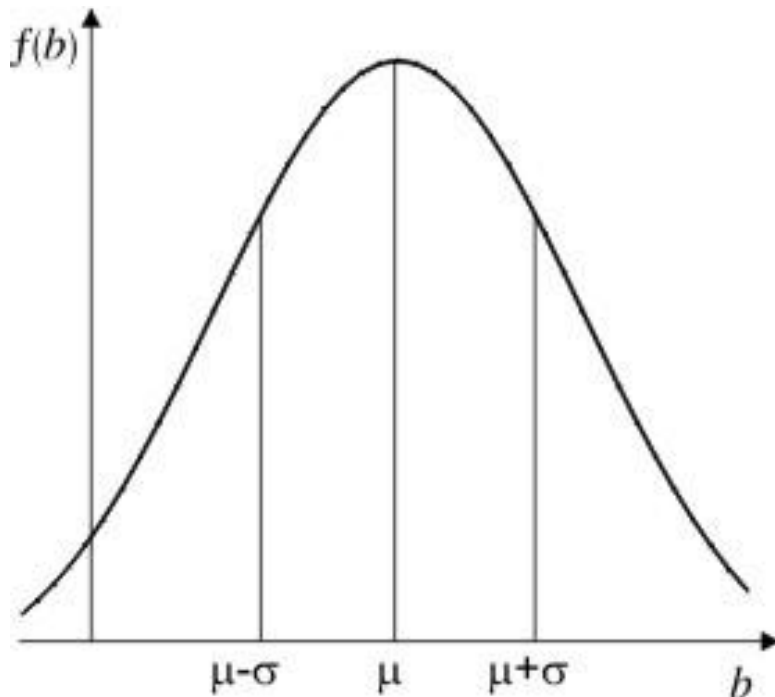
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.28 \\ 0.9 & 1 & -0.16 \\ 0.28 & -0.16 & 1 \end{pmatrix}$$



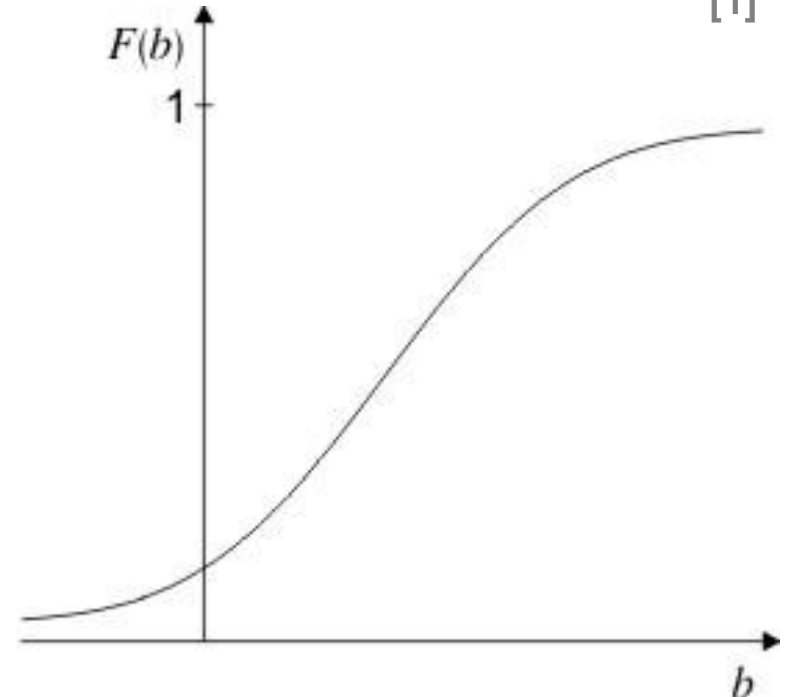
Deterministik	Probabilistik
akkumulierten konservativen Annahmen	Wahrscheinlichkeitsausagen (Quantifizierbar)
Unsicherheiten werden durch Sicherheitsbeiwerten berücksichtigt	



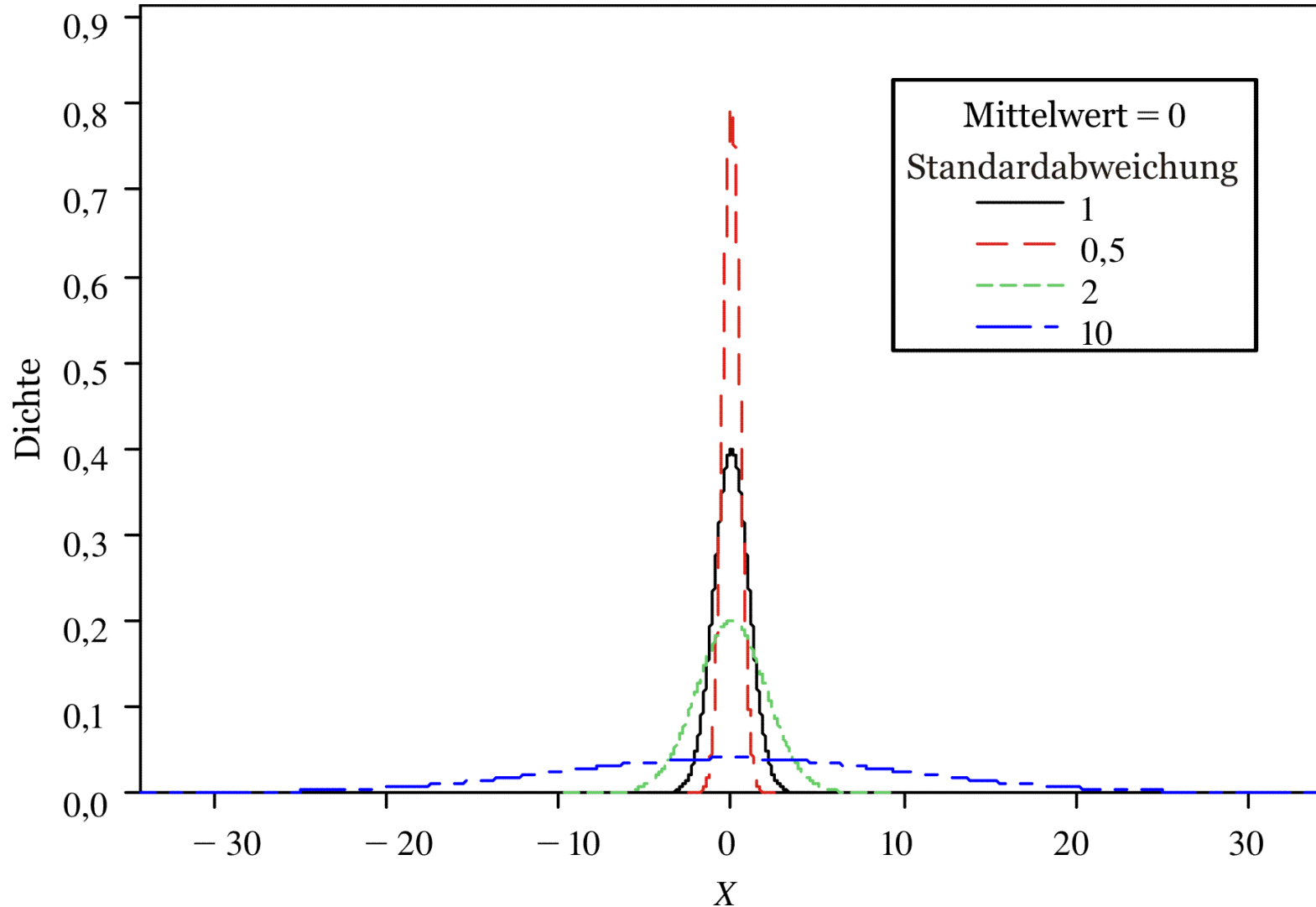
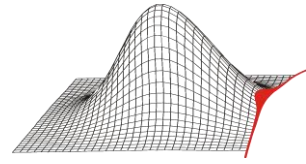
- auch Normalverteilung genannt

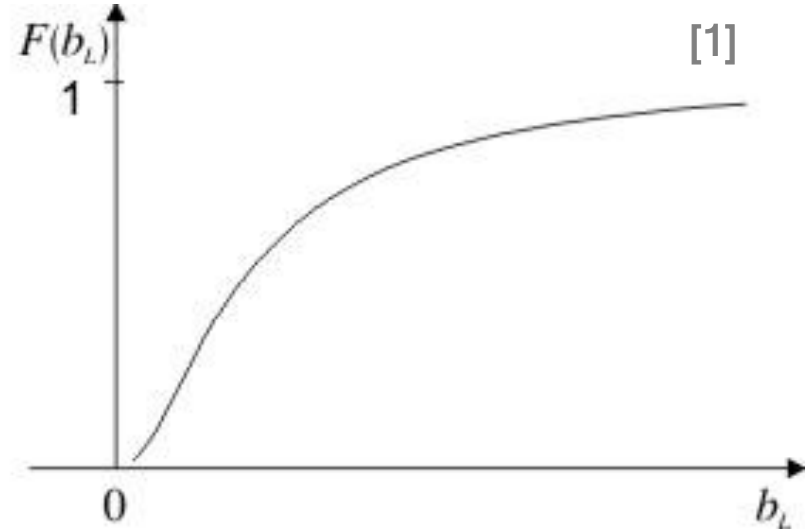
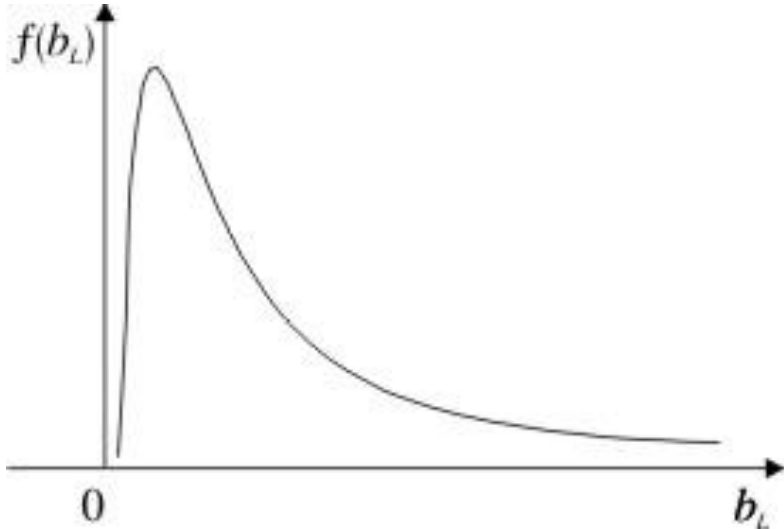
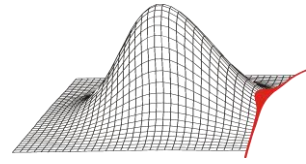


$$f(b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$



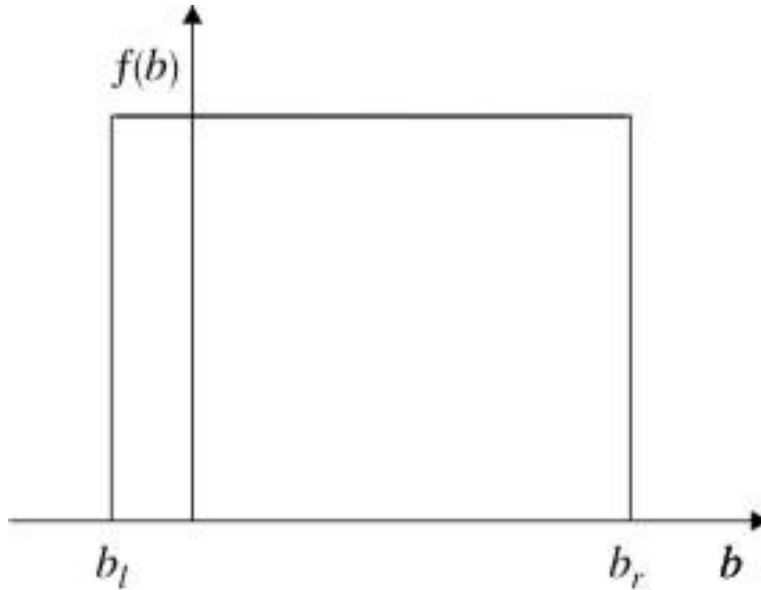
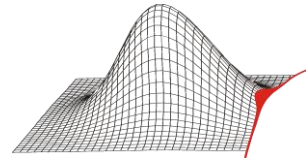
$$F(b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b \exp\left\{-\frac{(\tilde{b}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} d\tilde{b}$$



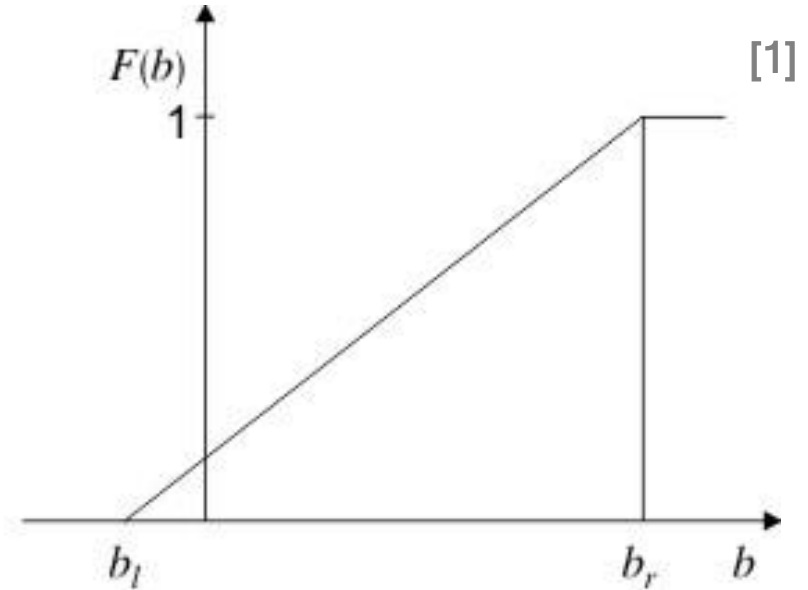


$$f(b_L) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta \sqrt{2\pi} b_L} \exp \left\{ -\frac{(\ln b_L - \lambda)^2}{2 \zeta^2} \right\} & \text{für } b_L > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

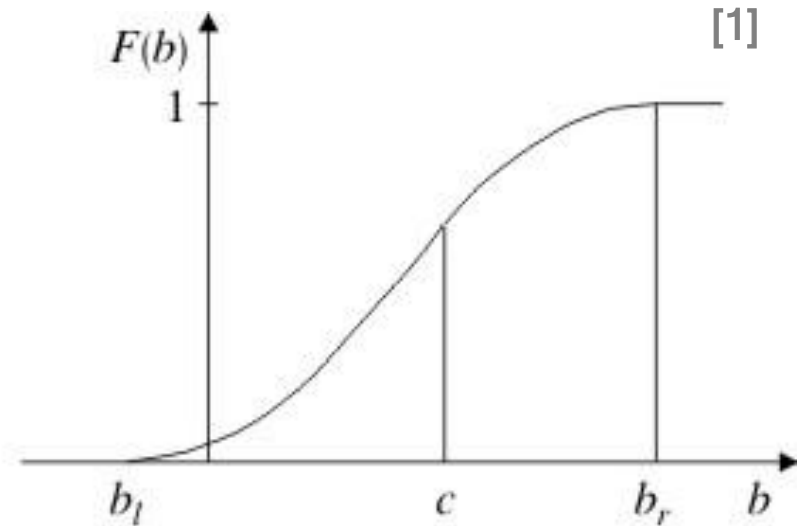
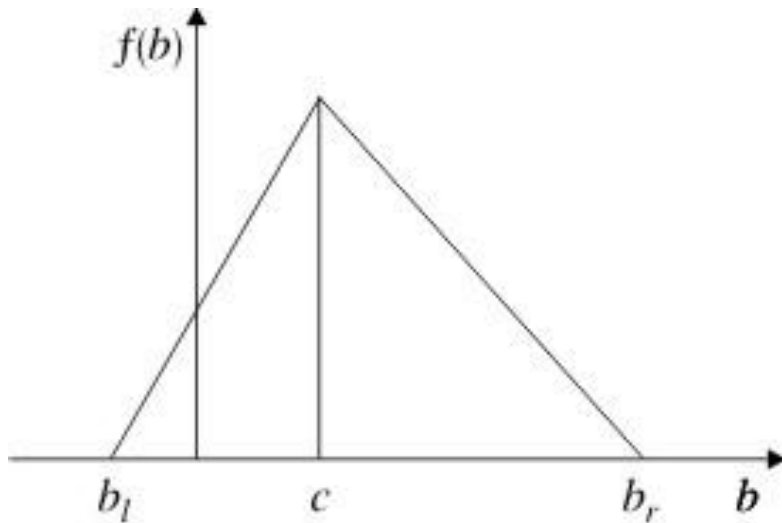
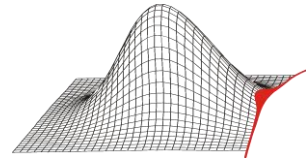
$$F(b_L) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta \sqrt{2\pi}} \int_0^{b_L} \frac{1}{\tilde{b}_L} \exp \left\{ -\frac{(\ln \tilde{b}_L - \lambda)^2}{2 \zeta^2} \right\} d\tilde{b}_L & \text{für } \tilde{b}_L > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



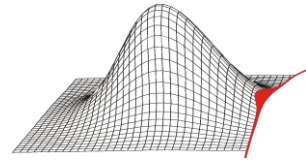
$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{b_r - b_l} & b_l \leq b \leq b_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < b_l \\ \frac{b - b_l}{b_r - b_l} & b_l \leq b \leq b_r \\ 1 & b > b_r \end{cases}$$



$$f(b) = \begin{cases} f_l(b) = \frac{2(b - b_l)}{(b_r - b_l)(c - b_l)} & b_l \leq b < c \\ f_r(b) = \frac{2(b_r - b)}{(b_r - b_l)(b_r - c)} & c \leq b \leq b_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad F(b) = \begin{cases} 0 & b < b_l \\ F_l(b) = \frac{b^2 + b_l^2 - 2b_l b}{(b_l - b_r)(b_l - c)} & b_l \leq b < c \\ F_r(b) = \frac{b^2 - 2b_r b + b_r c + b_l(b - c)}{(b_l - b_r)(b_r - c)} & c \leq b \leq b_r \\ 1 & b > b_r \end{cases}$$



Problem: Meist werden Systeme untersucht, in denen mehrere Zufallsvariablen Einfluss auf eine Ergebnisgröße haben.

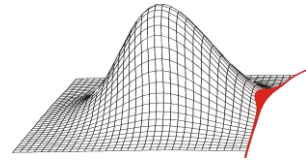
Die Anzahl der Zufallsvariablen hat Einfluss auf die Irrtumswahrscheinlichkeit der Konfidenzintervalle.

Lösung:

Anpassung der tolerierbaren Irrtumswahrscheinlichkeit mithilfe der Bonferroni-Methode oder Bonferroni-Korrektur:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{n_b}$$

Die Bonferroni-Methode ist eine grobe Näherung und sehr konservativ.



$(\alpha=0.05)$

